

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Septiembre 2015-coincidente)
Selectividad-Opción A**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.
- b) Determinése la matriz X tal que $B \cdot A \cdot X = C$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} &= \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/15 & 7/15 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8/15 & 19/15 \\ 1/5 & -4/15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b) } B \cdot A \cdot X = C \implies X = (BA)^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} 19/15 & -16/15 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Sea S la región del plano definida por:

$$y + 2x \geq 7; \quad y - 2x \geq -1; \quad y \leq 5;$$

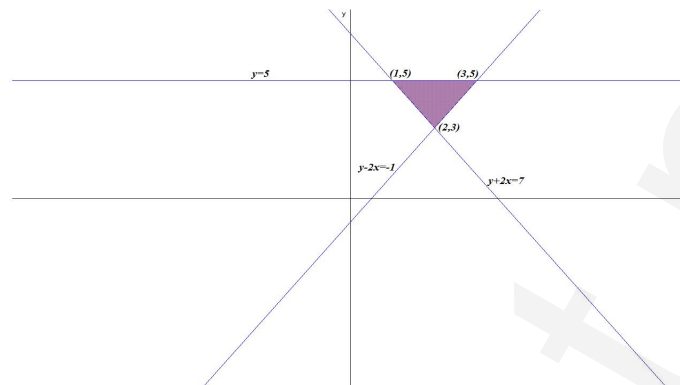
- a) Representése la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x - 5y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

- a) Los vértices serían: $(1, 5)$, $(3, 5)$ y $(2, 3)$.
- b) Función objetivo: $f(x, y) = -5x - 5y$

$$\begin{cases} f(1, 5) = -30 \\ f(3, 5) = -40 \text{ Mínimo} \\ f(2, 3) = -25 \text{ Máximo} \end{cases}$$

La región S pedida será:



Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real: $f(x) = e^{x^2}$

- Determinense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Determinense sus intervalos de concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2} = 0 \implies x = 0,$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego en $x = 0$ hay un mínimo. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el $(0, \infty)$.

b) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0 \implies$ la función es cóncava $\cup$ en todo el dominio de la función, es decir, en $\mathbb{R}$.

Problema 4 (2 puntos) Todos los estudiantes de una facultad de Madrid afirman haber comido en el último mes en alguna de las dos cafeterías de esa facultad, la grande y la pequeña. Un 60% declara haber comido en la grande mientras que un 55% declara haber comido en la pequeña. Calcúlese la probabilidad de que un estudiante de dicha facultad elegido al azar:

- Haya comido en el último mes en la cafetería grande y en la pequeña.
- Haya comido en el último mes en la cafetería pequeña si se sabe que nunca ha comido en la grande.

Solución:

G : grande y Pe : pequeña $\implies P(G) = 0,6$, $P(Pe) = 0,55$ y $P(G \cup Pe) = 1$

$$a) P(G \cup Pe) = 1 = P(G) + P(Pe) - P(G \cap Pe) \implies P(G \cap Pe) = 0,6 + 0,55 - 1 = 0,15$$

$$b) P(Pe|\overline{G}) = \frac{P(Pe \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(Pe) - P(G \cap Pe)}{P(\overline{G})} = \frac{0,55 - 0,15}{0,4} = 1$$

Problema 5 (2 puntos) La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a $1000 kg/ha$.

- a) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917,75; 10082,25)$ como intervalo de confianza para la media μ , expresado en kg/ha . Determinése la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.
- b) Determinése el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo $50 kg/ha$.

Solución:

$$a) \begin{cases} \overline{X} - E = 9917,75 \\ \overline{X} + E = 10082,25 \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{X} = 10000 \\ E = 82,25 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 82,25 = z_{\alpha/2} \frac{1000}{\sqrt{400}} \implies z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$p(Z \leq 1,645) = 0,9495 = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 0,1$$

Luego el nivel de confianza es del 90 %.

$$b) z_{\alpha/2} = 2,325, 2E = 50 \implies E = 25:$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 25 = 2,325 \frac{1000}{\sqrt{n}} \implies n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 1000}{25} \right)^2 = 8649$$

Luego $n = 8649$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2015-coincidente) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - 2z = a \end{cases}$$

- a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in R$.
- b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a-2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] == \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right)$$

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 - 7\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x+1) + m & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nota: $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

- a) Determinése para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.
- b) Determinése la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$.

Solución:

$$\text{a) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 6) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x+1) + m) = m \end{cases} \implies m = 6.$$

- b) En $x = -2$ la función es $f(x) = x^2 + 6$ y $f'(x) = 2x$. La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x - a)$ donde $a = -2$, $b = f(a) = f(-2) = 10$ y $m = f'(a) = f'(-2) = -4 \implies y - 10 = -4(x + 2)$ es la recta tangente buscada.

Problema 3 (2 puntos) Dada la función real de variable real $f(x) = (2x + 3)^5 + e^{2x}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\int f(x) dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 10(2x + 3)^4 + 2e^{2x}$

b) $\int ((2x+3)^5 + e^{2x}) dx = \int (2x+3)^5 dx + \int e^{2x} dx = \frac{(2x+3)^6}{6} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

Problema 4 (2 puntos) En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) Sea funcionario y hombre.

b) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

Solución:

Construimos una tabla de contingencia: (la probabilidad de ser mujer y funcionaria es $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$)

	F	$\bar{F}$	
H			0,4
M	0,42		0,6
	0,65	0,35	

 $\Rightarrow$

	F	$\bar{F}$	
H	0,23	0,17	0,4
M	0,42	0,18	0,6
	0,65	0,35	

a) $P(H \cap F) = 0,23$

b) $P(M|\bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0,18}{0,35} = 0,514$

Problema 5 (2 puntos) El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\bar{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ .

b) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o igual que 2625 gramos.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,645$, $n=100$ y $\bar{X} = 160$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \frac{10}{\sqrt{50}} = 2,326$$

$$IC = (\bar{X} - E; \bar{X} + E) = (100 - 2,326; 100 + 2,326) = (97,674; 102,326)$$

b) $\mu = 100$, $n = 25$ y $\bar{X} = 2625/25 = 105$:

$$P(\bar{X} \leq 105) = P\left(Z \leq \frac{105-100}{10/\sqrt{25}}\right) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$