Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2015)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^2 = A \Longrightarrow A^{15} = A$ y $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b)
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2 \Longrightarrow |C^3| = |C|^3 = 8$$

Problema 2 *(2 puntos)* Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

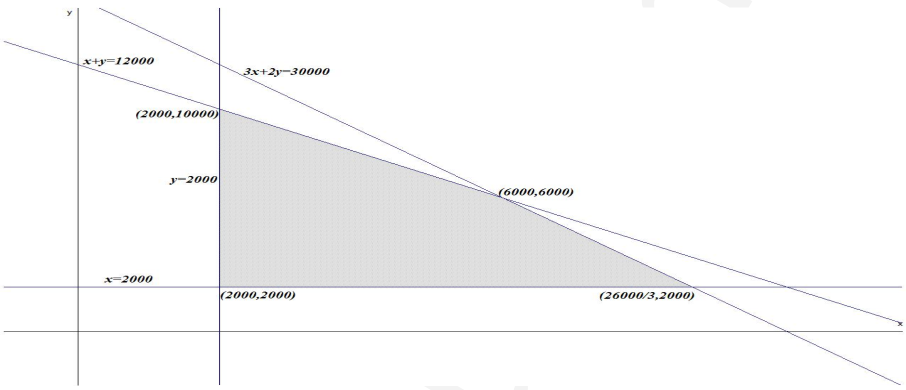
Solución:

LLamamos x : litros de aceite A e y : litros de aceite B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x, y) =$

$(0,25 \cdot 3)x + (0,3 \cdot 2)y = 0,75x + 0,6y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 12000 \\ x \geq 2000 \\ y \geq 2000 \\ 3x + 2y \leq 30000 \end{array} \right.$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2000, 2000)$, $(2000, 10000)$, $(26000/3, 2000)$ y $(6000, 6000)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(2000, 2000) = 2700 \\ z(2000, 10000) = 7500 \\ z(26000/3, 2000) = 7700 \\ z(6000, 6000) = 8100 \ \text{ Máximo} \end{array} \right.$$

El beneficio máximo es de 8100 euros y se alcanza comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2$, $a \in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 2ax - a$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - a - a = 0 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$f''(x) = 24x^2 - 2a = 24x - 3$:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 3 = 9 > 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ Mínimo}$$

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2)\,dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Ademas los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cap B|C)$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,97 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,03$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,09 \cdot 0,07 = 0,0063 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(A \cap B|C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = 0$ ya que $P(A \cap B) = 0$ por ser incompatibles y, por tanto, $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Problema 5 *(2 puntos)* La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimacion de 2, 35 gramos. Determinese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) $n = 64$ y $E = 2,35$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,35 = z_{\alpha/2}\frac{10}{8} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$P(Z \leq 1,88) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9699 \Longrightarrow \alpha = 0,0602$$

El nivel de confianza será $1 - \alpha = 1 - 0,0602 = 0,9398$ del 93,98 %.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right); \ |A| = 0, \ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

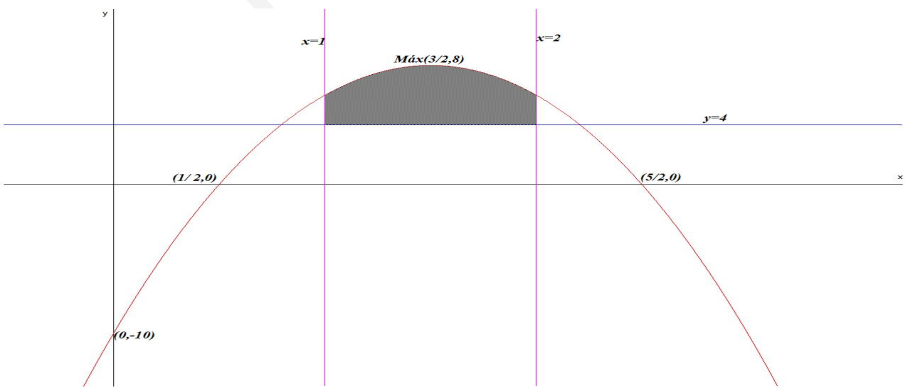
b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = -16x + 24 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -16 \Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -16 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, 8\right)$.

Hay un punto de corte con OY en $(0, -10)$ y dos con OX en $(1/2, 0)$ y $(5/2, 0)$.



b) $g(x) = 4$.

$$S = \int_1^2 (f(x)-g(x))\,dx = \int_1^2 (-8x^2+24x-14)\,dx = -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x\Big]_1^2 = \frac{10}{3}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (e^x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego la función es continua en $R - \{2\}$

b) En la rama $x < 0$: $f(x) = e^x$ La función no tiene verticales pero si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ $\lim_{x\longrightarrow -\infty} e^x = 0$ y, por tanto, no hay oblicuas.

En la rama $x \ge 0$: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2}$

Tiene una asíntota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = +\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

No tiene horizontales $\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Si tiene oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1;\quad n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = 5$$

$$y = x + 5$$

Problema 4 *(2 puntos)* La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es $3/4$. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

Solución:

Denominamos A al suceso llega puntual, $\overline{A}$ al no puntual y B utiliza transporte público. Tenemos:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(\overline{A}) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

a)

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

b)

$$P(\text{al menos uno llega temprano}) = 1 - P(\text{todos llegan tarde}) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,984375$$

Problema 5 *(2 puntos)* En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

Solución:

a) Tenemos $E = 15$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1,96 \cdot 75}{15}\right)^2 = 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

b) Tenemos $\mu = 250$ y $n = 81 \Longrightarrow N\left(\overline{X}; \frac{75}{9}\right)$:

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230 - 250}{75/9}\right) =$$

$$P(Z \geq -2,4)) = 1 - P(Z \leq -2,4) = P(Z \leq 2,4) = 0,9918$$