

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Junio 2015-coincidente)
Selectividad-Opción A**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 = F_2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a , sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) Para $a = 1$, calcúlese $\int_{-1}^0 (x - 1)f(x)dx$.

Solución:

a)

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a}{(x - 1)^2}$, $f'(-1) = 0 \implies a = 3$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \implies x = -1, x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en $x = -1$ hay un máximo.

c) con $a = 1$:

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^0 = \frac{4}{3}$$

Problema 3 (2 puntos) Se sabe que la derivada de cierta función real de variable real f es $f'(x) = x^2(x^2 - 2x - 15)$

a) Determinénse los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Determinénse los extremos relativos de f , indicando si se trata de máximos o mínimos relativos.

Solución:

a) $x^2(x^2 - 2x - 15) = 0 \implies x = 0, x = -3, x = 5$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

En $x = 0$ $f'(x)$ no cambia de signo y pasa de decrecer a decrecer.

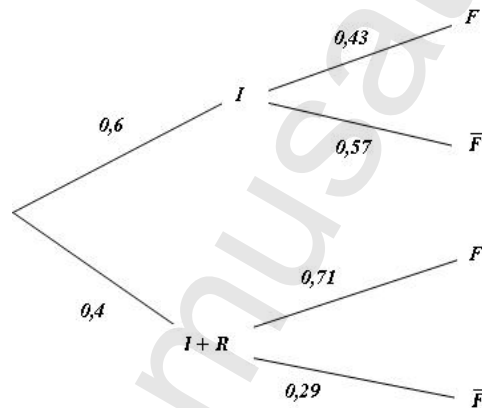
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ y decreciente en $(-3, 5)$.

- b) La función presenta un máximo en $x = -3$ y un mínimo en $x = 5$.

Problema 4 (2 puntos) En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determinése la probabilidad de que:

- a) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.
 b) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

Solución: $P(I) = 0,6$, $P(I + R) = 0,4$



- a)

$$P(F) = 0,6 \cdot 0,43 + 0,4 \cdot 0,71 = 0,542$$

- b)

$$P(I|F) = \frac{P(F|I)}{P(F)} = \frac{0,6 \cdot 0,43}{0,542} = 0,476$$

Problema 5 (2 puntos) El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 100$ litros. Determinése un intervalo de confianza al 95 % para μ .
 b) Determinése el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) Tenemos $\bar{X} = 100$, $\sigma = 2$, $n = 25$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (96,08; 103,92)$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{2}{\sqrt{25}} = 0,784$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 2$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2,575 \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(2,575 \cdot \frac{2}{2}\right)^2 = 6,6306 \Rightarrow n = 7$$

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Junio 2015-coincidente)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinénse los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a+4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = 2(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -1$$

Cuando se cumple que $a \neq 2$ y $a \neq -1$ la matriz $|A \cdot B|$ tiene inversa.

$$b) \text{ Para } a = 0: A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)X = C \Rightarrow X = (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Un banco oferta dos productos financieros, A y B . El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del 5 % de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del 2 % anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10.000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6.000 euros como máximo. Determinéase qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

Solución:

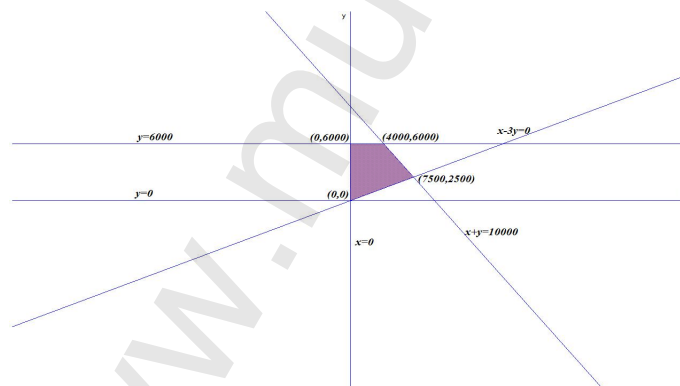
x : Cantidad de A e y : Cantidad de B .

Función objetivo: $z(x, y) = 0,05x + 0,02y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x \leq 3y \\ y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x - 3y \leq 0 \\ y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0, 0)$, $A(7500, 2500)$, $B(4000, 6000)$, y $C(0, 6000)$.

b)

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 & \text{Mínimo} \\ f(7500, 2500) = 425 \\ f(4000, 6000) = 320 \\ f(0, 6000) = 120 \end{cases}$$

El máximo beneficio sería de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 euros en el producto B .

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Determinéense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.
- Determinése la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx + 1) = 2b + 1 \end{array} \right. & \Rightarrow a = -1. \\ & \Rightarrow 4 + a = 2b + 1 \Rightarrow \\ & a - 2b = -3. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ a - 2b = -3 \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- En $x = -1$ $b = f(-1) = 0 \Rightarrow$ el punto de tangencia es el $(-1, 0)$.
 $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(-1) = -1/2$.
La recta tangente es: $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$ en su ecuación punto pendiente.

Problema 4 (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que $P(A) = 0,8$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

- ¿Son independientes los sucesos A y B ?
- Calcúlese $P(B|\overline{A})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S .

Solución:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,8 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2$
 $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,9 + 0,2 - 0,8 = 0,3$
 $P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24 \neq P(A \cap B)$, luego no son independientes.

$$\text{b) } P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,3 - 0,2}{0,2} = 0,5$$

Problema 5 (2 puntos) El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20mg/dl$.

- a) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191,2; 210,8)$, expresado en mg/dl , para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.
- b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ .

Solución:

$$a) \bar{X} = \frac{191,2 + 210,8}{2} = 201, E = \frac{210,8 - 191,2}{2} = 9,8 \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 9,8 = 1,96 \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 20}{9,8} \right)^2 = 16$$

$$b) n = 100 \text{ y } z_{\alpha/2} = 2,325:$$

$$E = 2,325 \frac{20}{100} = 4,65 \Rightarrow \text{la amplitud será de } 9,3.$$