Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2015) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+y-z=8 \\ 2x+az=3 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$$

1. Discútase en función de los valores del parámetro a.
2. Resuélvase para $a=1$.

Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\ |A|=-2a-4=0 \Longrightarrow a=-2$$

   - Si $a\neq -2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $a=-2$:

     $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\ |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right|=-2\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

     $$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right|=6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

     Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

2. Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+y-z=8 \\ 2x+z=3 \\ x+y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x)=3x^2+2x$$

www.musat.net

1. Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.
2. Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

Solución:

1. $f(x) = \int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + C$:

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 2 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

2.

$$b = f(1) = 4, \quad m = f'(1) = 5, \Longrightarrow y - 4 = 5(x - 1)$$

.

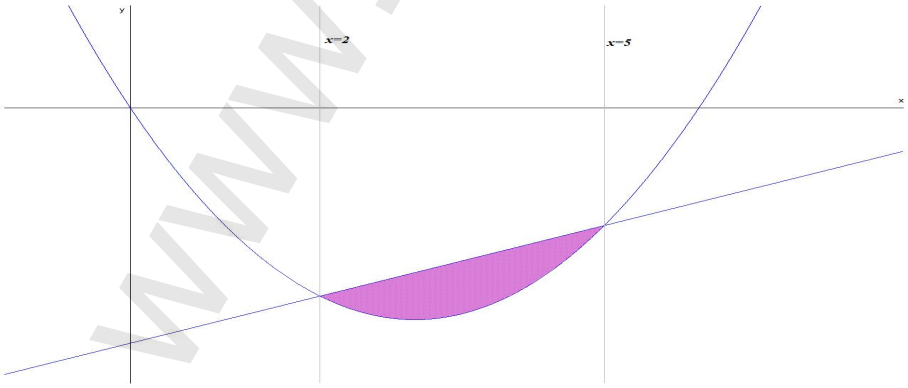
Problema 3 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

1. Represéntense gráficamente las funciones f y g.
2. Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

1. Gráfica:



2. $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 7x + 10)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

www.musat.net

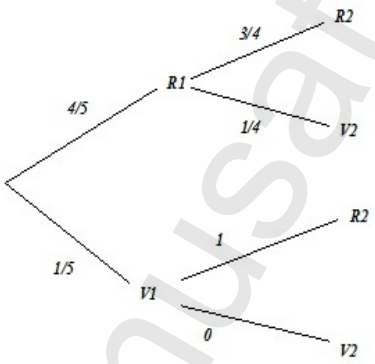
$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

1. Las dos bolas sean del mismo color.
2. La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Solución:



1.

$$P(mismo\ \ color) = P(R1)P(R2|R1) + P(V1)P(V2|V1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{3}{5}$$

2.

$$P(V1|R2) = \frac{P(R2|V1)P(V1)}{P(R2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo de reacción ante un obstaculo imprevisto de los conductores de automóviles de un pais, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

1. Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
2. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

www.mjsat.net

Solución:

1. Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $IC = (701; 799) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 701 \\ \overline{X} + E = 799 \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 750 \\ E = 49 \end{array} \right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 49 = 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

2. $z_{\alpha/2} = 1,285$;

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

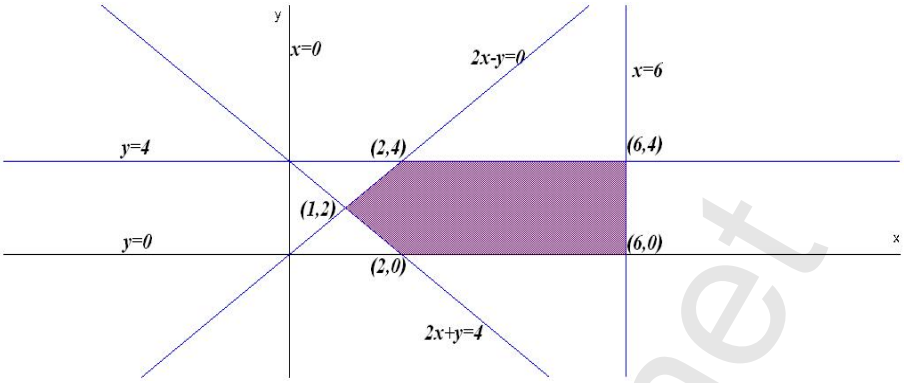
Solución:

LLamamos x : toneladas de pienso A e y : toneladas de pienso B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x, y) = 1000x + 2000y$ calculando su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x \leq 6 \\ y \leq 4 \\ y \leq 2x \Longrightarrow 2x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

La región S pedida será:

www.mujat.net



Los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$ y $(1,2)$:

$$\begin{cases} z(2,0) = 2000 \text{ Mínimo} \\ z(6,0) = 6000 \\ z(6,4) = 14000 \\ z(2,4) = 10000 \\ z(1,2) = 5000 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna del tipo B.

Problema 2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.
2. Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

Solución:

1. $|A| = 0 \Longrightarrow 8 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 2$.
   Si $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
   Si $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; |A| = 0, \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

2. $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x+m & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

1. Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.
2. Calcúlese $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

1. Para que f sea continua en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (3x+m) = 6+m$$

$$6+m = -4 \Longrightarrow m = -10$$

2.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x+m) = \infty$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A \cap B) = 0,3$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$; $P(B) = 0,7$. Calcúlense:

1. $P(A \cup B)$:
2. $P(B|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

1.

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9$$

2. $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,8$$

Problema 5 *(2 puntos)* La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

www.matsat.net

1. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100h$?

Solución:

1. Tenemos $\overline{X} = 8000$, $\sigma = 1000$, $n = 81$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7713,89; 8286,11)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1000}{\sqrt{81}} = 286,11$$

2. $\overline{X} \approx N\left(8100, \frac{1000}{\sqrt{100}}\right) = N(8100; 100)$

$$P(7904 \leq \overline{X} \leq 8296) = P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \leq Z \leq \frac{8296 - 8100}{100}\right) =$$

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96)) = P(Z \leq 1,96) - P(Z \leq -1,96) =$$

$$P(Z \leq 1,96) - (1 - P(Z \leq 1,96)) = 2P(Z \leq 1,96) - 1 = 0,95$$

www.mibatnet