

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Febrero 2015

No resuelto

Problema 1 (7 puntos). Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- a) Estudiar la posición de ambas rectas.
- b) La distancia que las separa.
- c) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(2, -1, 0)$.
- d) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
- e) Encontrar una recta que pasando por el punto P corte a ambas.
- f) Encontrar un plano paralelo a r y a s que contenga a P .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(2, 0, 2) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (1, 0, 3)$$

a)

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

b)

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right| = |(2, 2, 0)| = 2\sqrt{2}$$
$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

c)

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = 2(1, 1, 0) \\ P_h = P(2, -1, 0) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(2, 0, 2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies z-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-y+z=0$$

$$t : \begin{cases} z-2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

e)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} = (0, -1, -2) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(2, 0, 2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ -1 & -1 & y \\ -2 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x+2y-z-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ 1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+y-1=0$$

$$l : \begin{cases} 2x+2y-z-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

f) $\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = 2(1, 1, 0)$:

$$x+y+\lambda=0 \implies 2-1+\lambda=0 \implies \lambda=-1$$

$$\pi' : x+y-1=0$$

Problema 2 (3 puntos). Sea el punto $P(1, -1, 3)$. Se pide

- Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x - y + 3z - 2 = 0$.
- Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Solución:

a) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_{\pi} = (2, -1, 3) \\ P_t = P(1, -1, 3) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π :

$$2(1 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) + 3(3 + 3\lambda) - 2 = 0 \implies \lambda = -\frac{5}{7}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 10/7 = -3/7 \\ y = -1 + 5/7 = -2/7 \\ z = 3 - 15/7 = 6/7 \end{cases} \implies P' \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\begin{aligned} \frac{P'' + P}{2} = P' &\implies P'' = 2P' - P = \\ \left(-\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{12}{7} \right) - (1, -1, 3) &= \left(-\frac{13}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7} \right) \end{aligned}$$

b) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r/P \in \pi$:

$$2x + y + z + \lambda = 0 \implies 2 - 1 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4$$

$$\pi : 2x + y + z - 4 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + (\lambda) + (1 + \lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 1/3 = 4/3 \\ y = 1/6 \\ z = 1 + 1/6 = 7/6 \end{cases} \implies P' \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\begin{aligned} \frac{P'' + P}{2} = P' &\implies P'' = 2P' - P = \\ \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right) - (1, -1, 3) &= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$