Examen de Matemáticas II (Marzo 2015)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & 2y+ & mz= & 4\\ -mx+ & my+ & 3z= & m+2\\ 3x & - & 5z= & -2\end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m e interpretarlo geométricamente.

2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & 2y+ & mz= & 4\\ -mx+ & my+ & 3z= & m+2\\ 3x & - & 5z= & -2\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & 2 & m & 4\\ -m & m & 3 & m+2\\ 3 & 0 & -5 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$|A|=-8m^2-10m+18=0\Longrightarrow m=1,\ \ m=-9/4$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -9/4 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado (Solución única).

Si $m=-9/4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -9/4 & 2 & -9/4 & 4\\ 9/4 & -9/4 & 3 & -1/4\\ 3 & 0 & -5 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{rr} -9/4 & 2\\ 9/4 & -9/4\end{array}\right|=9/16\neq 0$$

Luego Rango$(A)=2$. Como:

$$\left|\begin{array}{rrr} -9/4 & 2 & 4\\ 9/4 & -9/4 & -1/4\\ 3 & 0 & -2\end{array}\right|=195/8\neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 0 & -5 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{rr} 1 & 2\\ -1 & 1\end{array}\right|=1\neq 3$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como: $F_3 = -2F_2 + F_1$ Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminados(Infinitas soluciones).

2. Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z= & 4 \\ -x+ & y+ & 3z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2/3 + 5/3\lambda \\ y = 7/3 - 4/3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Resolver:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin 3x}{x^2}$

Solución:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\bigg]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin 3x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$. Se pide calcular:

1. (0,75 puntos) Sus asíntotas.

2. (0,75 puntos) Estudiar monotonía y extremos.

3. (0,50 puntos) Esbozar la gráfica de la curva.

Solución:

1.

2. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+3}{x}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+3}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x}-x\right)=0$$

  Luego la asíntota oblicua es $y=x$

3.

$$f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}=0\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

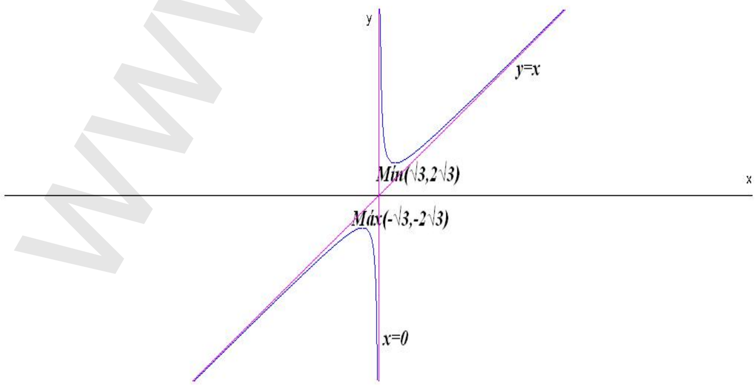
	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$.

La función tiene un máximo en el punto $(-\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ y un mínimo en $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

4. Representación:



Problema 4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y-2z=2\\ -y+z=3\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2\end{array}\right.$$

Se pide:

1. (0,50 puntos) Estudiar su posición relativa.
2. (0,50 puntos) Calcular la distancia que las separa.
3. (1 punto) Encontrar una recta t perpendicular a ellas y que las corte.
4. (1 punto) Encontrar una recta h que pasando por el origen de coordenadas corte a ambas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=-(3,1,1)\\ P_r(-1,-3,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=-(1,1,0)\\ P_s(0,1,2)\end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,4,2)$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right| = 7\neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

2.

$$\overrightarrow{u_t}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right| = (-1,1,2)\Longrightarrow |\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=\sqrt{6}$$

$$d(r,s)=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}\ u$$

3. Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,1,1)\\ P_r(-1,-3,0)\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,1,0)\\ P_s(0,1,2)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{ccc} -1 & 3 & x+1\\ 1 & 1 & y+3\\ 2 & 1 & z\end{array}\right| = 0\Longrightarrow x-7y+4z-20=0$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & x\\ 1 & 1 & y-1\\ 2 & 0 & z-2\end{array}\right| = 0\Longrightarrow x-y+z-1=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} x-7y+4z-20=0\\ x-y+z-1=0\end{array}\right.$$

4. Obtengo la recta h como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{OP_r} = (-1,-3,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (3,1,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{OP_s} = (0,1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ O(0,0,0) \end{cases}$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} -1 & 3 & x \\ -3 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y - 8z = 0$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - 2y + z = 0$$

$$h: \begin{cases} 3x - y - 8z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Examen de Matemáticas II (Marzo 2015)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi: x - 2y + z = 3$ y la recta

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

Se pide encontrar:

1. (1 punto). El punto simétrico del origen respecto de π.
2. (1 punto). El punto simétrico del origen respecto de r.

Solución:

1. - Buscamos una recta $s \perp \pi$ que pase por O:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

   - Calculamos el punto de corte entre s y π:

$$\lambda - 2(-2\lambda) + \lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 1/2$$

   Luego el punto es el $O'(1/2, -1, 1/2)$.

- El punto O'' simétrico de O respecto de O' tiene que cumplir:

$$\frac{O+O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = (1,-2,1)$$

2.
- Buscamos un plan $\pi' \perp r$ que pase por O:

$$-x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow x-y-z=0$$

$$r : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte entre r y π:

$$2-\lambda-\lambda-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2/3$$

Luego el punto es el $O'(4/3, 2/3, 2/3)$.

- El punto O'' simétrico de O respecto de O' tiene que cumplir:

$$\frac{O+O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = (8/3, 4/3, 4/3)$$

Problema 2 *(2 puntos)* Encontrar los puntos de la recta $r : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, que se encuentran a una distancia igual a 3 del punto $P(1,1,0)$

Solución:

Calculamos la ecuación de una esfera de centro $P(0,1,1)$ y radio 2 y ponemos la recta en su ecuación paramétrica:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9, \quad r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

Sustituimos los puntos de la recta en la esfera:

$$(-\lambda-1)^2 + (-1+\lambda-1)^2 + (1+2\lambda-1)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = -\frac{2}{3}$$

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow P_1(-1,0,3)$

Si $\lambda = -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow P_2\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$, se pide:

1. (1 punto) Calcular sus asíntotas.
2. (1 punto) Estudiar su monotonía.
3. (1 punto) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - **Verticales:**$x = -2$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2x-1}{x^2-4} = \pm\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{2x-1}{x^2-4} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{2x-1}{x^2-4} = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty$$

   $x = 4$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{2x-1}{x^2-4} = \pm\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-4} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2-4} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** $y = 0$

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-4} = 0$$

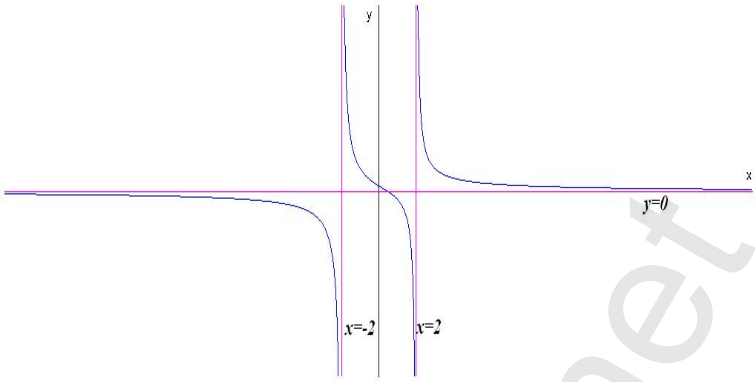
   - **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

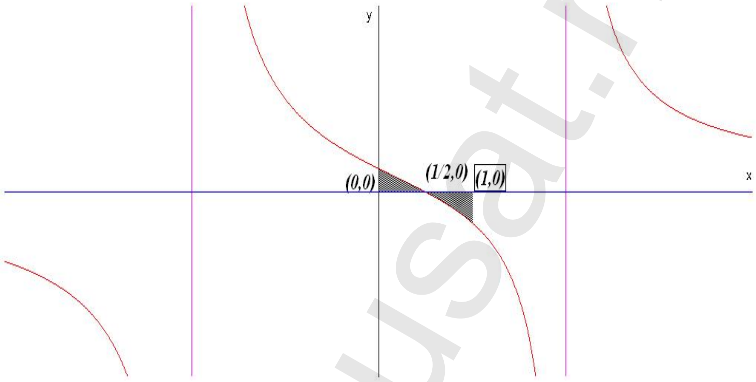
2. $$f'(x) = -\frac{2(x^2-x+4)}{(x^2-4)^2} < 0$$

   Luego no hay extremos y la derivada es siempre negativa por lo que la función decrece en todo el dominio de la función: $R - \{\pm 2\}$

3. La función corta al eje OX en el punto $(1/2, 0)$, por lo que tendremos que calcular dos áreas S_1 con límites de integración entre 0 y 1/2, y S_2 con límites de integración entre 1/2 y 1. La integral se resuelve por descomposición polinómica

   $$F(x) = \int \frac{2x-1}{x^2-4}\,dx = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$$





$$S_1 = F(1/2) - F(0) = 0,06316788478; \quad S_2 = F(1) - F(1/2) = -0,07619688508$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 0,06 + 0,08 = 0,14\ u^2$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ -m & m & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, se pide

1. (1 puntos) Encontrar los valores para los que A es inversible.
2. (1 puntos) Calcular la inversa de A para $m = 0$
3. (1 punto) Para $m = 0$ resolver la ecuación matricial $AX = B$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 2 & m \\ -m & m & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -8m^2 - 10m + 18 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -9/4$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -9/4 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $m = 1$ o $m = -9/4 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

2. Para $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5/9 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5/9 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$