Examen de Matemáticas II (Septiembre 2015)
Selectividad-Coincidentes-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ P_r = B(0,0,-3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,4) \\ \overrightarrow{PA} = (1,0,0) \\ P_r = P(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-4)$ y $\overrightarrow{AP} = (-1,0,0)$:

$$S = \frac{1}{2} \left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right| \right| = \frac{1}{2} |(0,4,-1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c) $C(a,0,0) \Longrightarrow = (2-a,1,1)$ y $\overrightarrow{CB} = (-a,0,-3)$ Como $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Longrightarrow$

$$(2-a,1,1) \cdot (-a,0,-3) = 0 \Longrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3,\ \ a = -1$$

La solución pedida es la negativa: $C(-1,0,0)$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \left(\begin{array}{ccc} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$,

$X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)$ y $O = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Solución:

a) $|M| = 2a^2 - 5a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3/2$:
Si $a \neq 1$ y $a \neq 3/2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \exists M^{-1}$
Si $a = 1$ o $a = 3/2 \Longrightarrow |M| = 0 \Longrightarrow \nexists M^{-1}$.

b) Si $a = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ como $F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se define la función $g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)}$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,5 puntos). Obtener el valor de $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x}$

Solución:

$$g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)} \Longrightarrow g'(x) = 2(f(x))f'(x) - f'(x)e^{f(x)}$$

$$y = (fg)(x) = f(g(x)) \Longrightarrow y' = (fg)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

a) $g(0) = (f(0))^2 - e^{f(0)} = 0 - e^0 = -1$; $g'(0) = 2(f(0))f'(0) - f'(0)e^{f(0)} = -1$ y $(fg)'(0) = f'(g(0))g'(0) = -f'(-1)$.

b) $y - b = m(x - a)$ donde $a = 0$, $b = f(a) = f(0) = 0$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1 \Longrightarrow y = x$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f'(x)}{1} = 1$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x - 2)f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = -1$

b) $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, luego la función está definida en el intervalo $[0, 1]$.
$\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}\,dx = \left.\frac{(x^2 - 4x + 3)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = -\sqrt{3}$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2015) Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z = & k \\ x+ & (k-1)y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = (k-1)(k-2) = 0 \Longrightarrow k = 1$ y $k = 2$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$\overline{A} = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

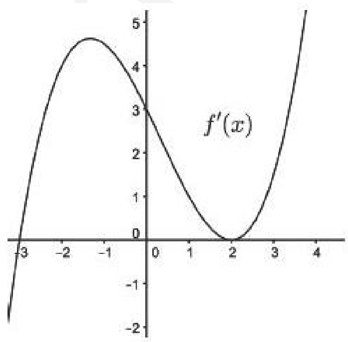
Si $k = 1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ como $F_1 = F_2 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ y el sistema es incompatible.

b) Para $k = 0$: $\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & -y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$

Para $k = 1$: $\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ x+ & & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = -\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Problema 2 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.
La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva



para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.

c) (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.

Solución:

a) Se sabe que $f(0) = 0$ (f pasa por el origen de coordenadas) y por la gráfica $m = f'(0) = 3 \Longrightarrow y = 3x$

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	creciente

La función presenta un mínimo en $x = -3$. En $x = 2$ no hay extremo.

c) En $x = 2$ $f''(2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ es un punto de inflexión, pero no pertenece al intervalo. En $x = -3/2$ $f''(-3/2) = 0 \Longrightarrow x = -3/2$ es un punto de inflexión, que si pertenece al intervalo.

Problema 3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2)$$

a) $\sin \alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{2}{3}$

b) $s \perp \pi / A \in s \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 4, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Problema 4 *(2 puntos)* Dado el vector $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\overrightarrow{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) (1 punto). Obtener los vectores $\overrightarrow{w}$ tales que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} = (a,b,c) \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow a - 2c = 0 \Longrightarrow a = 2c$

$$\overrightarrow{w} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5c^2+b^2}}(2c,b,c)$$

Si $c = 0 \Longrightarrow b \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{b}(0,b,0) = (0,\sqrt{5},0)$. Si $c \neq 0 \Longrightarrow$

$b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{c\sqrt{5}}(2c,0,c) = (2,0,1)$

b) $\overrightarrow{w} = (a,b,c)$:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-2b, -2a-c, b) = (2,-3,1) \Longrightarrow$$

$b = 1,\ \ 2a + c = 3$

$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{a^2+1+c^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2 + c^2 = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 3 \\ a^2 + c^2 = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2,\ \ c = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = (2,1,-1) \\ \\ a = 2/5,\ \ c = 11/5 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \left(\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{11}{5}\right) \end{array} \right.$$