Examen de Matemáticas II (Junio 2015)
Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Solución:

a) Continua en $x = 0$: $f(0) = -1$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (ax - b) = -b \Longrightarrow b = 1$

Continua en $x = 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (ax - b) = a - b$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 + bx + c) = 1 + b + c \Longrightarrow a - b = 1 + b + c \Longrightarrow a - 2b - c = 1$

Luego $a - 2 - c = 1 \Longrightarrow a - c = 3$

Derivable en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ a & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $f'(1^-) = a$, $f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow a - b = 2 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow c = 0$

b) La función g es continua en el intervalo $[1, 2]$ y también derivable en $(1, 2)$. ($g(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x + 1$) Por el Teorema del Valor Medio $\exists c \in (1, 2)/g'(c) = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$

$g'(c) = 2c + 1 = 4 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Problema 2 *(3 puntos)* Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.

b) (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.

c) (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = (1-a^2, 1, a)$, $r \parallel \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$

$$(1-a^2, 1, a) \cdot (1, 1, 1) = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 2$$

b) $r : \left\{ \begin{array}{c} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, 2) \\ P_r(2, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$

$(2 - 3\lambda) + (2 + \lambda) + 2\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow 2 = 0$ lo que nos indica que la recta es paralela al plano como se sabía por el apartado anterior.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 + 2 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ u$$

c) $r : \left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(4, 4, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \ u$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

Solución:

a) $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = L^{-1}(L^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/9 & -1/9 \\ 2/3 & -1/9 & 14/9 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

Solución:

a) $|A| = -2m^2 = 0 \Longrightarrow m = 0$. Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) $|4A^{-1}| = 4^3 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{4^3}{|A|} = |A| \Longrightarrow \dfrac{4^3}{-2m^2} = -2m^2 \Longrightarrow m^4 = 2^4 \Longrightarrow m = \pm 2$

Examen de Matemáticas II (Junio 2015) Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 5 \\ x+ & my = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{array}\right.$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & kz = & 2 \\ kx- & ky+ & 4z = & -4 \end{array}\right.$$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 5 \\ 1 & m & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |\overline{A}| = 3m + 12 = 0 \Longrightarrow m = -4$

Si $m \neq -4 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $m = -4$ como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango(A) = 2 = nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y = & 5 \\ x- & 4y = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 2 \\ k & -k & 4 & -4 \end{array}\right)$ $|A_1| = 0$, $|A_2| = 4 - k^2$, $|A_3| = -4 - 2k$, $|A_4| = 4 + 2k$, $|A_5| = -4k + 8$
Si $k = 2 \Longrightarrow |A_3| = -8 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k = -2 \Longrightarrow |A_5| = 8 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, puntos de corte :$(0, 0)$
Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
  $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty$ No hay.
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

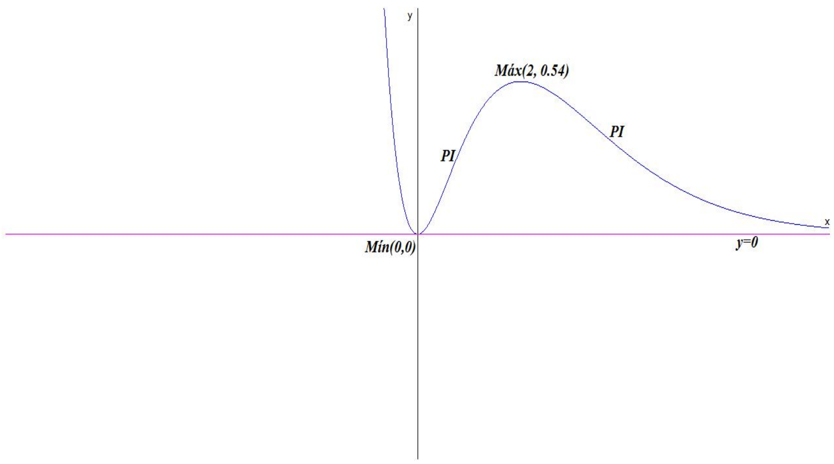
b) $f'(x) = xe^{-x}(2 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0, 0)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ y un máximo en $(2, 4e^{-2})$.

c) $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ son los puntos de inflexión:

	$(-\infty, 2 - \sqrt{2})$	$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$(2 + \sqrt{2}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	cónvexa $\frown$	cóncava $\smile$



Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = y - 5 = -(z+2)$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6, -3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ P_r(3, 2, 3) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_s(-1, 5, -2) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (4, -3, 5)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Calculamos el plano $\pi / r, s \subset \pi$:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_r(3, 2, 3) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - 7y - 5z + 26 = 0$$

Calculamos el plano $\pi' / r \perp \pi'$ y $P \in \pi'$:

$\pi' : x - 2y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 - 12 - 9 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 20 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 3z + 20 = 0$

La recta t que buscamos será:

$$t : \begin{cases} x - 7y - 5z + 26 = 0 \\ x - 2y + 3z + 20 = 0 \end{cases}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, 1, 0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y es paralelo a π.

b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.

Solución:

a) $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow$ $\pi' : x + y - z - 2 = 0.$

b) $|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |(-1, 2, 0)| = \sqrt{5}$

$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \ u^2$

c) $d(O, \pi) = \dfrac{|0 + 0 - 0 + 1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ u$