Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2014) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y+ & mz= & 3\\ 2x- & y & = & m\\ 3x+ & & mz= & 4 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) (1 punto). Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y+ & mz= & 3\\ 2x- & y & = & m\\ 3x+ & & mz= & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & 1 & m & 3\\ 2 & -1 & 0 & m\\ 3 & 0 & m & 4 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$|A|=-m^2+m=0\Longrightarrow m=0\ \ m=1$$

Si $m\neq 0$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado.

Si $m=-0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{rr} 0 & 1\\ 2 & -1 \end{array}\right|=-2\neq 0$$

Luego Rango$(A)=2$. Como:

$$\left|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right|=1\neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 2 & -1 \end{array}\right|=-3\neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como $F_3 = F_1 + F_2$ tendríamos que el sistema, en este caso es Compatible Indeterminado.

b) Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 3\\ 2x- & y & = & 1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4/3 - 1/3\lambda\\ y = 5/3 - 2/3\lambda\\ z = \lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, se pide hallar:

a) (0,25 puntos). El dominio de definición.

b) (0,25 puntos). Los puntos de corte con el eje OX.

c) (1,25 puntos). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores de x para los cuales se alcanza un máximo o un mínimo.

d) (1,25 puntos). Curvatura y puntos de inflexión.

Solución:

a) Dom$(f) = R$

b)

x	$f(x)$
0	0
3	0

c) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1;\ \ x = 3$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(1, 3)$

Luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(1; 3)$ y un mínimo relativo en el $(3; 0)$.

d) $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty, 2)$

La función es cóncava en el intervalo: $(2, \infty)$

Luego $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 2)$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las funciones:

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 5, \quad g(x) = 3x^2 + 5x - 5$$

calcular el área encerrada entre ambas.

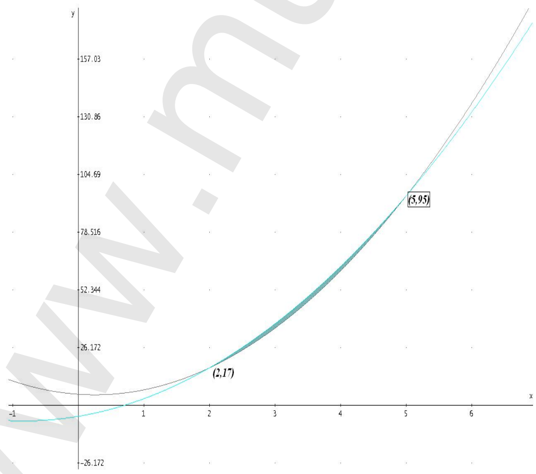
Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4x^2-2x+5 = 3x^2+5x-5 \Longrightarrow x^2-7x+10 = 0 \Longrightarrow x = 2, \ \ x = 5$$

$$F(x) = \int (x^2 - 7x + 10)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$\int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\, dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

$$S = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)* Una empresa química se dedica a la elaboración de dos productos diferentes: A y B. La fabricación de cada uno de ellos requiere dos procesos diferentes. La siguiente tabla muestra el tiempo necesario en cada uno de los procesos para la obtención de una unidad de cada producto:

	Tiempo proceso I	Tiempo proceso I
Unidad producto A	4 horas	2 horas
Unidad producto B	2 horas	9 horas

Cada uno de los procesos debe ser supervisado en todo momento por un ingeniero. El ingeniero que supervisa el proceso I dispone para esa labor de 16 horas cada semana, mientras que el encargado de supervisar el proceso II dispone de 24 horas semanales.
La empresa vende cada unidad de producto A a un precio de 7 unidades monetarias, y cada unidad de B, a un precio de 5 unidades monetarias.
Determinar las unidades que deben obtenerse de cada producto con el fin de maximizar los ingresos semanales.

Solución:
Sea x : el número de unidades de A
Sea y : el número de unidades de B

El problema de programación lineal sería el de maximizar la función objetivo: $z(x, y) = 7x + 5y$ dentro de la región factible determinada por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 16 \Longrightarrow 2x + y \leq 8 \\ 2x + 9y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

El befición máximo se encuentra en los vértices de la región factible:

$$z(0, 8/3) = 40/3$$
$$z(4, 0) = 28$$
$$z(3, 2) = 31$$

El máximo ingreso semanal se obtiene al fabricar 3 unidades del tipo A y 2 del tipo B.

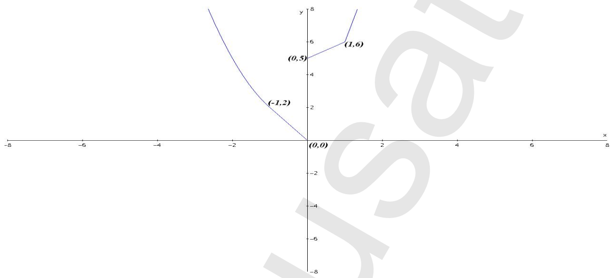
Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2014) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Representar gráficamente y estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} & x \le -1 \\ -2x & \text{si} & -1 < x < 0 \\ x+5 & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ 6x & \text{si} & x > 1 \end{cases}$$

Solución:



- Continuidad en $x = -1$: Es continua

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} (x^2+1) = 2, \quad \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (-2x) = 2, \ f(-1) = 2$$

- Continuidad en $x = 0$: Es discontinua no evitable, hay un salto.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (-2x) = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (x+5) = 5$$

- Continuidad en $x = 1$: Es discontinua evitable, hay un agujero.

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x+5) = 6, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (6x) = 6, \ f(6) \text{ no existe}$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$. Se pide:

a) Calcular sus asíntotas.

b) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

c) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2}{x-3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-3} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2-3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - x\right) = 3$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 3$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 6$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, 6)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo en $(6, 12)$.

c)

$$f(1) = -\frac{1}{2}, \ \ m = f'(1) = -\frac{5}{4}$$

Recta tangente: $y + \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(x-1)$

Recta normal: $y + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}(x-1)$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ -2 & m & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Calcular la inversa de A para $m = 2$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ -2 & m & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

b) Para $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 2/3 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700, \;\; 2x + 3y \leq 300, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

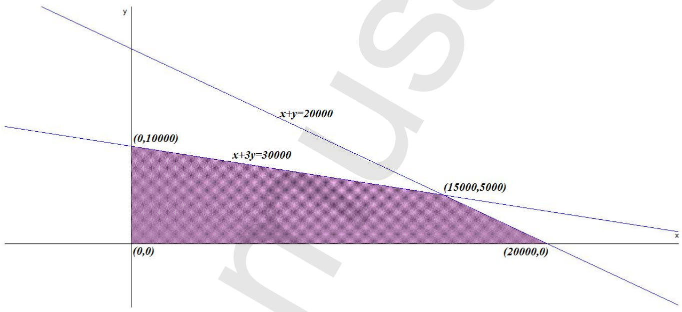
b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeto a:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0, 100) = 7650 \\ f(116,7; 0) = 7560 \\ f(75, 50) = 8685 \;\; \text{Máximo} \end{array} \right.$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75, 50)$ con un valor de 8685.


y
x+y=20000
(0,10000)
x+3y=30000
(15000,5000)
x
(0,0)
(20000,0)