

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Septiembre 2014-coincidente)
Selectividad-Opción A**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese B^{31} .

b) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B$.

Solución:

a)

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B \implies B^{31} = B$$

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ello tiene 2 máquinas, A y B . Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina A , fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina B produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina A no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina B . El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para A y de 600 euros/hora para B . Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.

Solución:

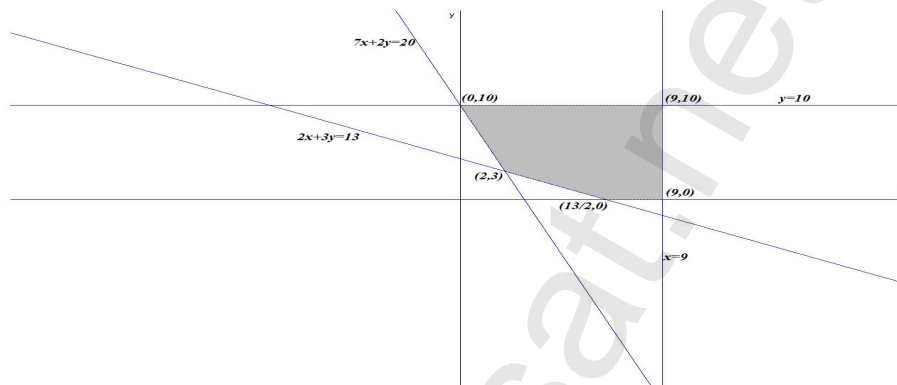
x : número de horas de funcionamiento de la máquina A e y : número de horas de funcionamiento de la máquina B

	Tm plástico superior	Tm plástico medio	coste
A	7	2	800
B	2	3	600
	20	13	

Función Objetivo: $f(x, y) = 800x + 600y$

$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 13 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2, 3)$, $(13/2, 0)$, $(9, 0)$, $(9, 10)$ y $(0, 10)$.

$$\begin{cases} f(2, 3) = 3400 \text{ Mínimo} \\ f(13/2, 0) = 5200 \\ f(9, 0) = 7200 \\ f(9, 10) = 13200 \\ f(0, 10) = 6000 \end{cases}$$

El mínimo coste se produce cuando la máquina A trabaja 2 horas y 3 horas la B con un coste de 3400 euros.

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real: $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ (x - 1)^3 + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Determinése el valor de la constante a para que sea una función continua en todo su dominio.
- Para $a = 0$, calcúlese el valor de la integral $\int_1^5 f(x) dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^3 + a = a$$

Luego $a = 4$

b) con $a = 0$

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (x-1)^3 dx = \left. \frac{(x-1)^4}{4} \right|_1^5 = 64$$

Problema 4 (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = P(A|B) = 0,25$ y $P(B|A) = 0,5$.

- a) Estúdiese si los sucesos son independientes.
- b) Calcúlese $P(A \cup B)$

Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,125}{0,5} = 0,5$$

$P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 = P(A \cap B) \Rightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,5 - 0,125 = 0,625$

Problema 5 (2 puntos) La capacidad vital forzada es una medida para calcular el volumen de los pulmones de las personas adultas que se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 1 litro.

- a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 144 personas adultas que dieron una media de capacidad vital forzada de 4 litros. Determinése un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral obtenido a partir de una muestra de tamaño 81, con un nivel de confianza del 99 % ?

Solución:

a) Tenemos $\bar{X} = 4$, $\sigma = 1$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (3,84; 4,16)$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{1}{\sqrt{144}} = 0,16$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \frac{1}{\sqrt{81}} = 0,286$$

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Septiembre 2014)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - ay = 4 \end{cases}$$

- a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.
b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -a & 4 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -12 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, contéstese razonadamente a las preguntas:

- a) Calcúlense su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- b) Hállense las asíntotas, si las tuviere, y esbócese la gráfica de la función f .

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, los puntos de corte serán $(0, -1/2)$ con el eje de ordenadas y $(-1, 0)$ con el de abscisas.

$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \neq 0 \Rightarrow$ la función no tiene extremos relativos. Por otra parte el numerador es siempre negativo y el denominador es siempre positivo, luego $f'(x) < 0$ en todo el dominio de la función y, por tanto, f es decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$.

- b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$

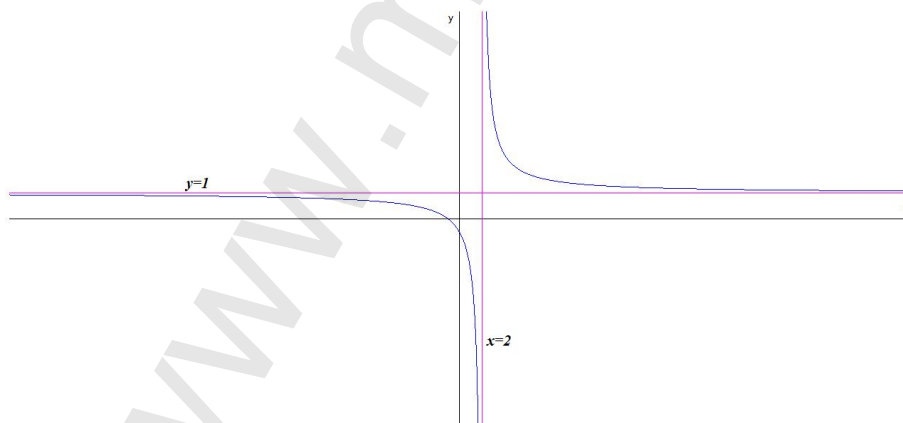
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 - ax + 1$

- a) Determinése el valor de a para que la función tenga un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.
- b) Para el caso en el que $a = 48$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

- a) Si $f'(x) = 3x^2 - a \implies f'(2) = 12 - a = 0 \implies a = 12$
 $f(x) = x^3 - 12x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función tiene un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$

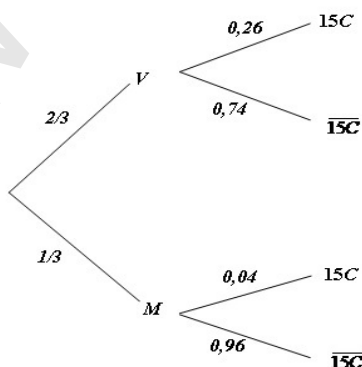
- b) $a = 48 \implies f(x) = x^3 - 48x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 48$:
 $b = f(5) = -114$ y $m = f'(5) = 27 \implies y + 114 = 27(x - 5)$

Problema 4 (2 puntos) Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 crestas es 0,26, mientras que en una mujer es 0,04.

- a) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 crestas en el recuento de dicha área.
- b) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?

Solución:

$$P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(V) = \frac{2}{3}, \quad P(15C|V) = 0,26, \quad P(15C|M) = 0,04$$



a)

$$\begin{aligned} P(15C) &= P(15C|V)P(V) + P(15C|M)P(M) = \\ &= 0,26 \cdot \frac{2}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} = 0,187 \end{aligned}$$

b)

$$P(V|15C) = \frac{P(15C|V)P(V)}{P(15C)} = \frac{0,26 \cdot \frac{2}{3}}{0,187} = 0,927$$

Problema 5 (2 puntos) El peso en kilogramos de la cabeza humana en adultos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 0,75 kilogramos.

- a) Una muestra aleatoria simple de 16 individuos a los que se les ha realizado una densitometría, prueba diagnóstica que permite medir el peso de la cabeza, proporcionó una media muestral de 5,137 kilogramos. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ .
- b) ¿Cuántas densitometrías como mínimo deben realizarse para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 100 gramos, con el mismo nivel de confianza del 98 %?

Solución:

- a) Tenemos $\bar{X} = 5,137$, $\sigma = 0,75$, $n = 16$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (4,701; 5,573)$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \frac{0,75}{\sqrt{16}} = 0,436$$

- b) $E = 0,1$ kg

$$0,1 = 2,325 \frac{0,75}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,75}{0,1} \right)^2 = 304,066 \Rightarrow n = 305$$