Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2014)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & \lambda y+ & z= & -\lambda\\ 4x- & 2\lambda y+ & 2z= & \lambda-3\end{array}\right.$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda\\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda-3\end{array}\right)\Longrightarrow |A_1|=\left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda\\ 4 & -2\lambda\end{array}\right|=0;\ |A_2|=\left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 4 & 2\end{array}\right|=0;$$

$$|A_3|=\left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda\\ 4 & \lambda-3\end{array}\right|=3\lambda-3=0\Longrightarrow \lambda=1;\ |A_4|=\left|\begin{array}{cc} -\lambda & 1\\ -2\lambda & 2\end{array}\right|=0;$$

$$|A_5|=\left|\begin{array}{cc} -\lambda & -\lambda\\ -2\lambda & \lambda-3\end{array}\right|=3\lambda(1-\lambda)\Longrightarrow \lambda=0,\ \lambda=1;$$

$$|A_6|=\left|\begin{array}{cc} 1 & -\lambda\\ 2 & \lambda-3\end{array}\right|=3\lambda-3\Longrightarrow \lambda=1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{\ 2x-y+z=-1\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\mu\\ y=1+2\mu+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Estudíese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(2x-3)}{(x^2(x-2)^2)} = 0 \Longrightarrow x = 3/2, \ \ x = 3$$

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en un entorno de $x = 4$.
Otra manera sería: f es creciente en un entorno $U(x)$ de un punto x si $\forall x_1, x_2 \in U(x)/x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Elegimos dos puntos próximos a $x = 4$ sean $x_1 = 3,9$ por la izquierda y $x_2 = 4,1$ por la derecha. Calculamos $f(x_1) = 0,1093117408$ y $f(x_2) = 0,1405342624$. Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

a) Esbócese la gráfica de la función f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

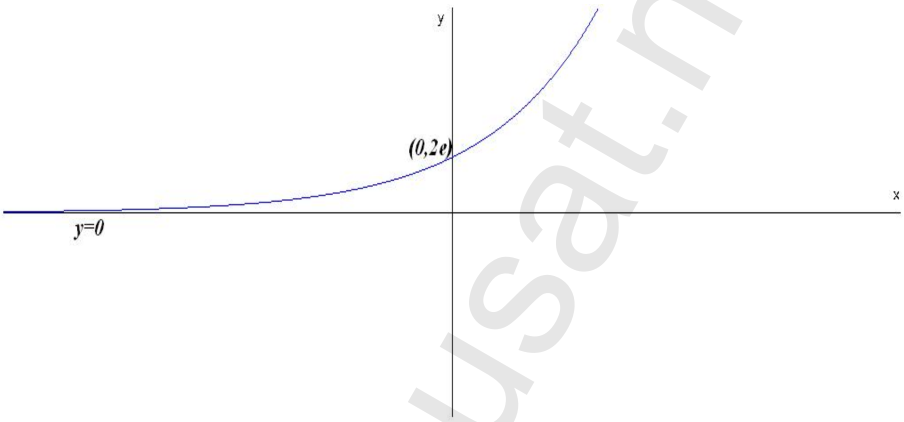
Solución:

a) A grandes rasgos, el único punto de corte es $(0,2e)$ y no tiene asíntotas verticales y si tiene una asíntota horizontal en $y=0$:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} 2e^{x+1} = 0$$

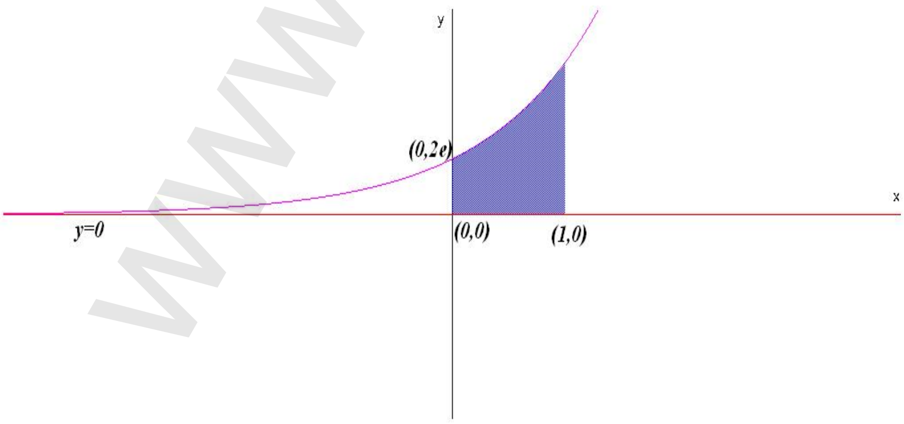
.

$$f'(x) = 2e^{x+1} > 0 \Longrightarrow f \text{ siempre creciente}$$



b)

$$S = \int_0^1 2e^{x+1}\,dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e(e-1)\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)* En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales,

3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.

b) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

Solución:
Sean los sucesos A con dibujos de animales, B con dibujos de personas y C con dibujos de árboles.

$$P(A) = \frac{7}{22}, \quad P(B) = \frac{3}{22}, \quad P(C) = \frac{12}{22}$$

a)

$$P(\text{mismo papel}) = P(AA)+P(BB)+P(CC) = \frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}+\frac{3}{22}\cdot\frac{2}{21}+\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21} =$$

$$= \frac{30}{77} = 0,3896103896$$

b)

$$P(\text{el primero de persona al tercero}) =$$

$$= P(AAB) + P(ACB) + P(CAB) + P(CCB) =$$

$$= \frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{7}{22}\cdot\frac{12}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{12}{22}\cdot\frac{7}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}\cdot\frac{3}{20} = \frac{171}{1540} = 0,1110389610$$

Problema 5 *(2 puntos)* La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 169$, $\sigma = 16$, $n = 625$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (167,512; 170,488)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{16}{\sqrt{625}} = 1,488$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$4 = 1,645\frac{16}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 43,2964 \Longrightarrow n = 25$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2014) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$.

b) Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$.

Nota: A^T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3. **Solución:**

a)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^T$$

Luego

$$(A \cdot A^T)^{200} = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot A^T - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4; \quad y \leq x - 1; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

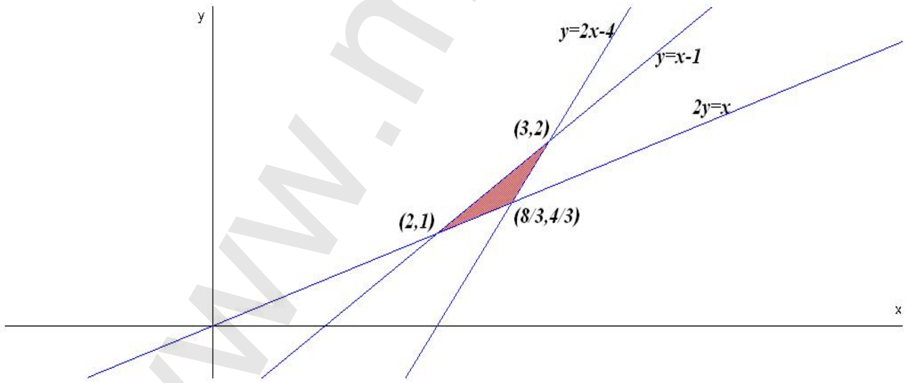
.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2, 1)$, $(3, 2)$ y $(8/3, 4/3)$.

b)

$$\begin{cases} f(2, 1) = -1 \text{ Máximo} \\ f(3, 2) = -3 \text{ Mínimo} \\ f(8/3, 4/3) = -4/3 \end{cases}$$

El máximo es de -1 y se alcanza en el punto $(2, 1)$. El mínimo es de -3 y se alcanza en el punto $(3, 2)$.

Problema 3 *(2 puntos)* función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) Calcúlese $\int_0^2 f(x)\, dx$ para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{a(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2};\ \ f'(-1) = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

b)

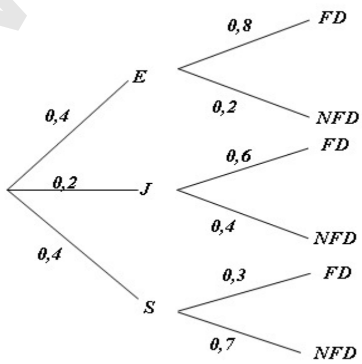
$$\int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln |4 + x^2| \Big]_0^2 = \frac{\ln 2}{2}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Solución:



a)

$$P(FD) = P(FD|E)P(E) + P(FD|J)P(J) + P(FD|S)P(S) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)

$$P(S|NFD) = \frac{P(NFD|S)P(S)}{P(NFD)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

Problema 5 *(2 puntos)* El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7,840.

Exprésense los tamaños muéstrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muéstrales respectivos.

Nota:Utilícese $z_{0,05} = 1,645$.

Solución:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3,290 = 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \Longrightarrow n_1 = 0,25\sigma^2$$

$$7,840 = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \Longrightarrow n_2 = 0,0625\sigma^2$$

$$n_1 = n_2 + 7500 \Longrightarrow 0,25\sigma^2 = 0,0625\sigma^2 + 7500 \Longrightarrow \sigma = 200$$

Luego $n_1 = 0,25 \cdot 40000 = 10000$ y $n_2 = 0,0625 \cdot 40000 = 2500$.