Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2014) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Hállense los valores de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -1,\ \ b = 1$$

b) Si $a = 1$ y $b = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BX - A = I \Longrightarrow X = B^{-1}(I + A)$

$$I + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

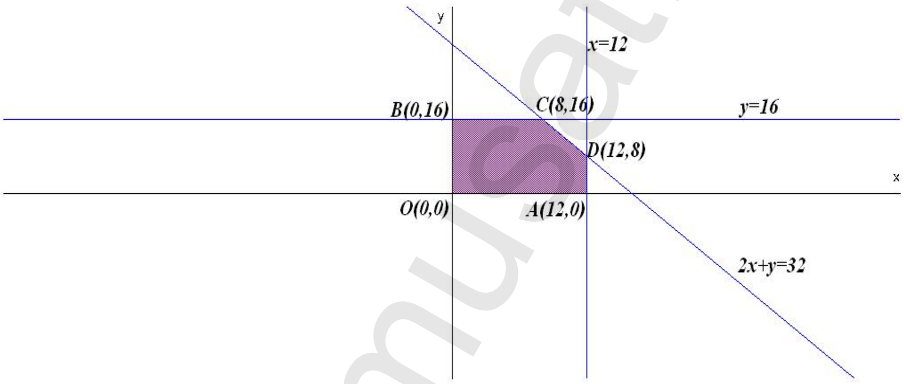
Problema 2 *(2 puntos)* Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
LLamamos x : al nº de pesqueros e y al nº de yates.

$$z(x, y) = 50000x + 10000y$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} 100x + 50y \le 1600 \\ x \le 12 \\ y \le 16 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \le 32 \\ x \le 12 \\ y \le 16 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} z(12, 0) = 600000 \\ z(0, 16) = 160000 \\ z(12, 8) = 680000 \;\; \text{Máximo} \\ z(8, 16) = 560000 \end{array}\right.$$

Hay que reparar 12 pesqueros y 8 yates para que el ingreso sea máximo con un montante de 680000 euros.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{-4}{x+2} - 1 & \text{si} & x \le 0 \\ & & \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

a) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

Solución:

a) Asíntotas:

- Si $x \leq 0$: En $x = -2$ hay una vertical

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

En $y = -1$ hay una horizontal

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{-x-6}{x+2} = -1$$

- Si $x > 0$: No hay una verticales y en $y = 0$ hay una horizontal

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Puntos de Corte:

- Si $x \leq 0 \Longrightarrow (0, -3)\ \ (-6, 0)$
- Si $x > 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-4}{x+2} - 1\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx =$$

$$-4\ln|x+2| - x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|]_{0}^{1} = -1 - 3\ln 2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es 0,6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25. Calcúlense:

a)$P(B)$, b)$P(A \cap B)$, c)$P(A)$, d)$P(A \cup B)$

Solución:

$$P(\overline{B}) = 0,6, \quad P(A|B) = 0,4, \quad P(B|A) = 0,25$$

$$P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,4$

b) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

c) $P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B|A)}=\dfrac{0{,}16}{0,25}=0,64$

d) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,64+0,4-0,16=0,88$

Problema 5 *(2 puntos)* El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X}=22$, $\sigma=5$, $n=20$ y $z_{\alpha/2}=1,645$:

$$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(20,528;23,471)$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,645\frac{4}{\sqrt{20}}=1,4713$$

b) $E=0,5$, $\sigma=5$ y $z_{\alpha/2}=1,645$

$$0,5=1,645\frac{5}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n\simeq 173,18$$

Luego $n=174$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2013) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+ay+4z=1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = a+3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

- Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = 0, \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A_2| = 0, \quad |A_3| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

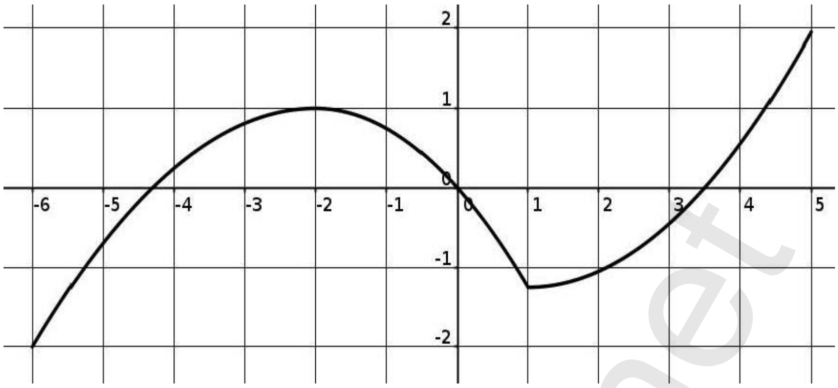
Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+4z=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-8/3 \\ z=2 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* La figura representa la gráfica de una función $f : [-2; 5] \longrightarrow R$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.

a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?



b) ¿En qué puntos del intervalo $[-6, 5]$ f alcanza sus extremos relativos?

c) ¿Cuál es el signo de $\int_2^4 f(x)dx$?

d) ¿En qué valores de $(-6; 5)$ f no es derivable?

Solución:

a) $f'(x) > 0$ en $[-6, -2) \cup (1, 5]$.

b) En $x = -2$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ hay un mínimo relativo, en $x = -6$ hay un mínimo absoluto y en $x = 5$ hay un máximo absoluto.

c) Es claramente negativo: El área encerrada por la curva y el eje de abcisas entre $x = 2$ y $x \simeq 3,5$ es mayor que el área encerrada por la curva y el eje de abcisas entre $x \simeq 3,5$ y $x = 4$.

d) La función f no es derivable en $x = 1$, en este punto la función hace un pico, y en él se podrían trazar infinitas tangentes. Las derivadas laterales no coincidirían.

Problema 3 *(2 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(2x^2-ax+1)=3-a\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(-x^2+3x-b)=2-b\end{array}\right. \Longrightarrow a-b=1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\left(\frac{3}{2}\right)-b=\frac{1}{4}\Longrightarrow b=2$$

Luego $a=3$ y $b=2$.

b)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}2x^2-x+1 & \text{si} & x\le 1\\ -x^2+3x-4 & \text{si} & x>1\end{array}\right. \Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{lll}4x-1 & \text{si} & x\le 1\\ -2x+3 & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$

Tenemos $f(3)=-4$, el punto de tangencia es $(3,-4)$. La pendiente de la recta tangente en este punto es $m=f'(3)=-3$. La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

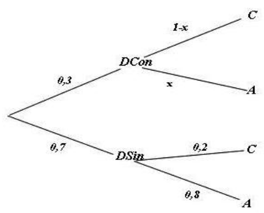
$$y+4=-3(x-3)$$

Problema 4 *(2 puntos)* En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

Solución:



a) $P(A\cap DSin)=0,7\cdot 0,8=0,56$

b) $P(C) = 0,4 \Longrightarrow P(A) = 0,6 = 0,3x + 0,7 \cdot 0,8 \Longrightarrow x = 0,1333 \Longrightarrow x = 13,33\,\%$

Problema 5 *(2 puntos)* El nº de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

$$40 \quad 28 \quad 41 \quad 102 \quad 95 \quad 33 \quad 108 \quad 20 \quad 64$$

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 % , construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

Solución:

$$N(\mu, 5); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $n = 9$, $\overline{x} = 59$, $\sigma = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{30}{\sqrt{9}} = 19{,}6$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (39{,}4, 78{,}6)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645\frac{50}{\sqrt{4}} = 41{,}125$$