Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014-coincidente) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Determínese la matriz X tal que $AX = A^{-1}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $AX = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

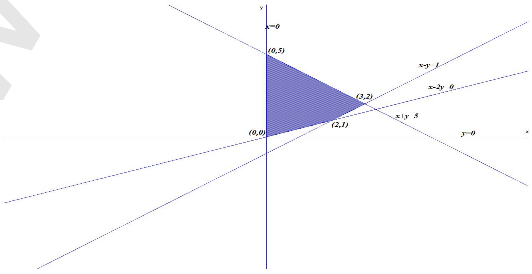
$$x - 2y < 0; \quad x - y < 1; \quad x + y < 5; \quad x > 0; \quad y > 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0,0)$, $A(2,1)$ $B(3,2)$, y $C(0,5)$.

b)

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \text{ Mínimo} \\ f(2,1) = 1 \\ f(3,2) = 1 \\ f(0,5) = -5 \end{cases}$$

El mínimo estaría en el punto $C(0,5)$ con un valor de -5 y, el máximo estaría en cualquier punto del segmento que une los puntos A y B con valor 1.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si es que existen.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: No hay, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$
- Oblícuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$, pero en este punto no hay un extremo dado que $f'(x) > 0$ en el dominio de la función y, por tanto, es creciente en R y no tiene extremos.

Problema 4 *(2 puntos)* Todos los trabajadores de una determinada empresa tienen como mínimo conocimientos de Inglés o de Alemán. El 75 % de los empleados tienen conocimientos de Inglés y el 46 % conocimientos de Alemán. Calcúlese la probabilidad de que un empleado elegido al azar:

a) Tenga conocimientos de Inglés y de Alemán.

b) Tenga conocimientos de Inglés si sabemos que tiene conocimientos de Alemán.

Solución:

$$P(I) = 0,75, \quad P(A) = 0,46, \quad P(I \cup A) = 1$$

a)

$$P(I \cap A) = P(I) + P(A) - P(I \cup A) = 0,75 + 0,46 - 1 = 0,21$$

b)

$$P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{0,21}{0,46} = 0,457$$

Problema 5 *(2 puntos)* La cantidad de azúcar, en gramos, del contenido de las botellas de un litro de una conocida bebida refrescante se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 2 gramos.

a) Se ha realizado un análisis de control de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 100 de esas botellas y se ha obtenido una cantidad media de azúcar igual a 70 gramos. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 2 gramos?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 70$, $\sigma = 2$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (69,61; 70,39)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $E = 1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10,82 \Longrightarrow n = 11$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014-coincidente) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 12a - 12 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/4 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{mx-6}{x-3} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) Calcúlese la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{mx-6}{x-3} = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow f$ continua en $x = 0$ independientemente del valor que tome el parámetro real m.

b) En $x = 5$ $b = f(5) = 27 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(5, 27)$. $f'(x) = 2x \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(5) = 10$. La recta tangente es: $y - 27 = 10(x - 5)$ en su ecuación punto pendiente.

Problema 3 *(2 puntos)* Para la función real de variable real $f(x) = \dfrac{(5x+7)^{10}}{2}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 25(5x+9)^9$

b) $\displaystyle\int \frac{(5x+7)^{10}}{2}\,dx = \frac{(5x+7)^{11}}{110} + C$

Problema 4 *(2 puntos)* En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80 % de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40 % de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90 % son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

a) Sea mujer y extranjera.

b) Sea español sabiendo que no es mujer.

Solución:

$P(E) = 0,8$, $P(\overline{E}) = 0,2$, $P(M) = 0,4$, $P(\overline{M}) = 0,6$, $P(E|M) = 0,9$, $P(\overline{E}|M) = 0,1$

Construimos una tabla de contingencia:

	E	$\overline{E}$	
M	$0,36$	$0,04$	$0,4$
$\overline{M}$	$0,44$	$0,16$	$0,6$
	$0,8$	$0,2$	1

a) $P(\overline{E} \cap M) = P(\overline{E}|M)P(M) = 0,1 \cdot 0,4 = 0,04$

b) $P(E|\overline{M}) = \dfrac{P(E \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,44}{0,8} = 0,55$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso, en gramos, del contenido de las cajas de una conocida marca de cereales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 20 de esas cajas de cereales para realizar un estudio y la media de los pesos de sus contenidos ha sido $\overline{x} = 500$. Calcúlese un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 500$, calcúlese la probabilidad de que la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 cajas sea inferior a 495 gramos.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 500$, $\sigma = 10$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (495,62; 504,38)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,38$$

b) $\mu = 500$, $n = 20$ y $\overline{X} \approx N\left(500; \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = N(500; 2,236)$:

$$P(\overline{X} \le 495) = P(Z \le \frac{495 - 500}{2,236}) =$$

$$P(Z \le -2,24) = 1 - P(Z \le 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$