Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x = -1 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0, \;\; x + y \leq 6, \;\; x \geq 0, \;\; y \leq 3$$

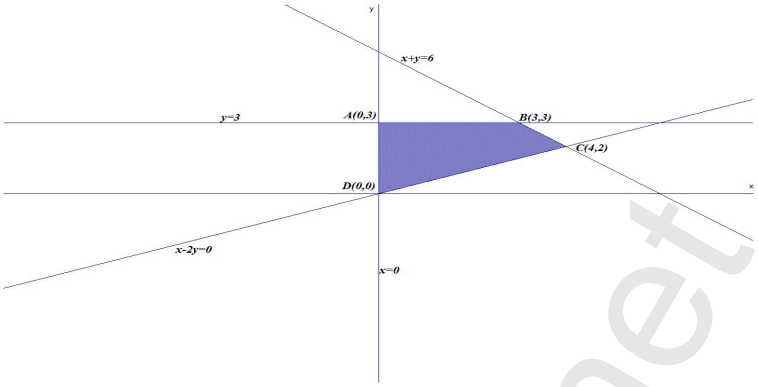
a) Represéntese la región S.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) La región S pedida será:

www.musat.net



b)

$$\begin{cases} z(0,3) = -6 \text{ Mínimo} \\ z(3,3) = 9 \\ z(4,2) = 16 \text{ Máximo} \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

El máximo es de 16 y se alcanza en el punto $C(4,2)$. El mínimo es de -4 y se alcanza en el punto $A(0,2)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

b) Calcúlese $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x+a) = 1 + a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1$$

$$1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Para que f sea continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x+b) = 3 + b$$

$$7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

www.musat.net

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - 2\right)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x\Big]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que: $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B|A) = 0,5$. Calcúlense:

a) $P(B)$:

b) $P(A|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) =$$
$$= 0,5 + 0,2 - 0,4 = 0,3$$

b)

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,3} = 0,28$$

Problema 5 *(2 puntos)* La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 36$, $\sigma = 3$, $n = 48$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (35,151; 36,849)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{48}} = 0,849$$

www.mujat.net

b) $E = 1$, $\sigma = 3$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$1 = 1,645\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 24,35$$

Luego $n = 25$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+az=2 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=2 \\ 3x+4y+2z=-1 \\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese $\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$:

$$b = f(1) = -1, \quad m = f'(1) = 4, \Longrightarrow \; y + 1 = 4(x - 1)$$

.

b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)dx = x^4 - x^3 - x^2\Big]_2^3 = 41$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 2$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = 2$$

www.musat.net

b) $Dom(f) = R - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

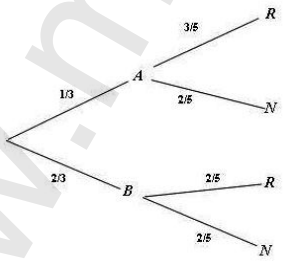
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 8)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Solución:



a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$

Problema 5 *(2 puntos)* El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

www.musat.net

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16,33; 19,27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) $(16,33; 19,27) \Longrightarrow \overline{x} = 17,80,\ \ E = 1,47$ como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,47 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 16$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $n = 64$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{64}} = 0,735$$

www.musat.net