Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2014

Problema 1 *(5 puntos).* Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} ,$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. La distancia que las separa.
3. Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
4. Encontrar una recta que pasando por el punto $P(-1, 3, 0)$ corte a ambas.
5. Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} , \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1, 4, 1)$$

1.

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2.

$$|\overrightarrow{u_t}| = |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |(3, -4, 3)| = \sqrt{34}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{10}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{17} \ u$$

3.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (3, -4, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ -4 & 3 & y + 2 \\ 3 & 2 & z + 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (3, -4, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x - 1 \\ -4 & 0 & y - 2 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + 3y + 2z - 8 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, -5, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -5 & 3 & y+2 \\ -1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 7x+4y-13z-5 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+2y+z-5 = 0$$

$$l : \begin{cases} 7x + 4y - 13z - 5 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

5.

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$$

$$(2\lambda + 1)^2 + (3\lambda - 5)^2 + (2\lambda - 1)^2 = 25 \Longrightarrow 17\lambda^2 - 30\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,7 \Longrightarrow P_1(3,4; 3,1; 2,4) \\ \lambda_2 = 0,07 \Longrightarrow P_2(0,14; -1,79; -0,86) \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos).* Se pide:

1. Dados los puntos $P_1(-1, 2, 0)$ y $P_2(3, 5, 1)$ encontrar el plano mediador.
2. Dados los planos $\pi_1 : x - 3y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 : 3x - y - z + 2 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

1.

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow$$

$$\pi : 4x + 3y + z - 15 = 0$$

2.

$$\frac{|x - 3y + z + 2|}{\sqrt{11}} = \frac{|3x - y - z + 2|}{\sqrt{11}} \Longrightarrow \begin{cases} \pi : x + y - z + 2 = 0 \\ \pi' : x - y = 0 \end{cases}$$

Problema 3 *(3 puntos).* Dada la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z - 6 = 0$ se pide:

1. Calcular su centro y radio.
2. Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z = 2$.
3. Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(3, 2, 1)$.

Solución:

1. $$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = -4 \Longrightarrow a = 2 \\ n = -2b = -2 \Longrightarrow b = 1 \\ p = -2c = -4 \Longrightarrow c = 2 \\ -6 = 4 + 1 + 4 - r^2 \end{array}\right. \Longrightarrow C(2, 1, 2), \ \ r = \sqrt{15}$$

2. $x^2+y^2-4x-2y-10 = 0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z = 0$ de centro en el punto $C'(2, 1, 1)$ y radio: $-10 = 4 + 1 - r'^2 \Longrightarrow r' = \sqrt{15}$

3. $$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} = (1, 1, -1) \\ P(3, 2, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow x+y-z+\lambda = 0 \Longrightarrow 3+2-1+\lambda = 0 \Longrightarrow$$
$$\lambda = -4 \Longrightarrow \pi : x + y - z - 4 = 0$$