Examen de Matemáticas II (Marzo 2014)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} mx+ & y+ & 2z = & 2\\ x+ & 2y+ & mz = & 3\\ mx+ & 4y- & mz = & 5\end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m e interpretarlo geométricamente.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} mx+ & y+ & 2z = & 2\\ x+ & 2y+ & mz = & 3\\ mx+ & 4y- & mz = & 5\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccr|c} m & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & m & 3\\ m & 4 & -m & 5\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$|A| = -5m^2-3m+8=0\Longrightarrow m=1,\ \ m=-8/5$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -8/5 \Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado (Solución única).

Si $m=-8/5$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rcr|c} -8/5 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -8/5 & 3\\ -8/5 & 4 & 8/5 & 5\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{rc} -1/6 & 1\\ 1 & 2\end{array}\right| = -4/3\neq 0$$

Luego Rango$(A)=2$. Como:

$$\left|\begin{array}{rcc} -8/5 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ -8/5 & 4 & 5\end{array}\right| = 39/5\neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & -1 & 5\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 2\end{array}\right| = 1\neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como: $F_3 = 3F_2 - 2F_1$ Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminados(Infinitas soluciones).

b) Para $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Resolver:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$

b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{xe^x)}$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx = \left.\frac{2x \sin 2x + \cos 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{xe^x} = 2$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Se pide calcular:

a) (0,75 puntos) Sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Estudiar monotonía y extremos.

c) (0,50 puntos) Esbozar la gráfica de la curva.

Solución:

a)

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

c)

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1, \; x = -1$$

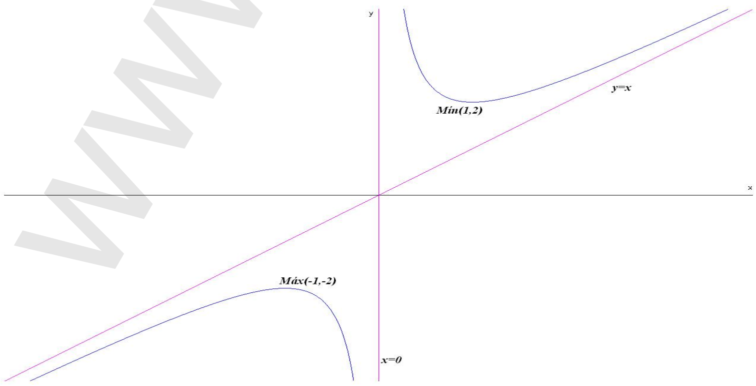
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, 2)$.

d) Representación:



Problema 4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (0,50 puntos) Estudiar su posición relativa.

b) (0,50 puntos) Calcular la distancia que las separa.

c) (1 punto) Encontrar una recta t perpendicular a ellas y que las corte.

d) (1 punto) Encontrar una recta h que pasando por el origen de coordenadas corte a ambas.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -3) \\ P_r(2, 1, 2) \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 0) \\ P_s(0, 1, 3) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (2, 0, -1)$

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = -7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

b)

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = -(3, 3, -1) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{19}$$

$$d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19}\ u$$

c) Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -3) \\ P_r(2, 1, 2) \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 0) \\ P_s(0, 1, 3) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 3 & 1 & x - 2 \\ 3 & -2 & y - 1 \\ -1 & -3 & z - 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 11x - 8y + 9z - 32 = 0$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{rrc} 3 & 1 & x \\ 3 & -1 & y - 1 \\ -1 & 0 & z - 3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y + 6z - 19 = 0$$

$$t : \begin{cases} 11x - 8y + 9z - 32 = 0 \\ x + y + 6z - 19 = 0 \end{cases}$$

d) Obtengo la recta h como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_r} = (2, 1, 2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -3) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_s} = (0, 1, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 0) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 8y - 5z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 3 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x + 3y - z = 0$$

$$h : \begin{cases} x + 8y - 5z = 0 \\ 3x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Examen de Matemáticas II (Marzo 2013)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 3x + y - 2z = 3$ y la recta

$$r : \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

Se pide encontrar:

a) (1 punto). El punto simétrico del origen respecto de π.

b) (1 punto). El punto simétrico del origen respecto de r.

Solución:

a) - Buscamos una recta $r \perp \pi$ que pase por O:

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte entre r y π:

$$9\lambda + \lambda + 4\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 3/14$$

Luego el punto es el $O'(9/14, 3/14, -3/7)$.

- El punto O'' simétrico de O respecto de O' tiene que cumplir:

$$\frac{O+O''}{2}=O' \Longrightarrow O''=2O'-O=(9/7,3/7,-6/7)$$

b) - Buscamos un plan $\pi \perp r$ que pase por O:

$$x+y-z+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow x+y-z=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte entre r y π:

$$1+\lambda+\lambda+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1/3$$

Luego el punto es el $O'(2/3,-1/3,1/3)$.

- El punto O'' simétrico de O respecto de O' tiene que cumplir:

$$\frac{O+O''}{2}=O' \Longrightarrow O''=2O'-O=(4/3,-2/3,2/3)$$

Problema 2 *(2 puntos)* Encontrar los puntos de la recta $r: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, que se encuentran a una distancia igual a 3 del punto $P(0,1,1)$

Solución:

Calculamos la ecuación de una esfera de centro $P(0,1,1)$ y radio 2 y ponemos la recta en su ecuación paramétrica:

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9, \quad r:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$$

Sustituimos los puntos de la recta en la esfera:

$$\lambda^2(1+\lambda-1)^2(1+\lambda-1)^2=9 \Longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}$$

Si $\lambda=\sqrt{3} \Longrightarrow P_1(\sqrt{3},1+\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

Si $\lambda=-\sqrt{3} \Longrightarrow P_2(-\sqrt{3},1-\sqrt{3},1-\sqrt{3})$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-16}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular sus asíntotas.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía.

c) (1 punto) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:**$x = -4$

$$\lim_{x\longrightarrow -4} \frac{2x-4}{x^2-16} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -4^-} \frac{2x-4}{x^2-16} = \left[\frac{-12}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -4^+} \frac{2x-4}{x^2-16} = \left[\frac{-12}{0^-}\right] = +\infty$$

$x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{2x-4}{x^2-16} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{2x-4}{x^2-16} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{2x-4}{x^2-16} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x-4}{x^2-16} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

b)

$$f'(x) = -\frac{2(x^2-4x+16)}{(x^2-16)^2} < 0$$

Luego no hay extremos y la derivada es siempre negativa por lo que la función decrece en todo el dominio de la función: $R - \{\pm 4\}$

c) La función corta al eje OX en el punto $(2, 0)$, por lo que tendremos que calcular dos áreas S_1 con límites de integración entre 0 y 2, y S_2 con límites de integración entre 2 y 3. La integral se resuelve por descomposición polinómica

$$F(x) = \int \frac{2x-4}{x^2-16}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x-4| + \frac{3}{2}\ln|x+4| + C$$

$$S_1 = F(2) - F(0) = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 = 0,26; \quad S_2 = F(3) - F(2) = \frac{3}{2}\ln 7 - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 = -0,12$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 0,26 + 0,12 = 0,38\ u^2$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -m & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, se pide

a) (1 puntos) Encontrar los valores para los que A es inversible.

b) (1 puntos) Calcular la inversa de A para $m = 2$

c) (1 punto) Para $m = 2$ resolver la ecuación matricial $AX = B$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & -m & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 - 3m = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

b) Para $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1 & -1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1 & -1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$