Examen de Matemáticas II (Modelo 2014)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Solución:

a)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall k,, \in R$$

b)
$$k = 6 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX - A = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B + A)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1; 1; 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

Solución:

a)

$$\begin{cases} 3x + ay + z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow |A| = a^2 + 3a - 10 = 0 \Longrightarrow a = 2, \;\; a = -5$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial $(x = y = z = 0)$.

Si $a = 2$ o $a = -5$ el sistema es compatible indeterminado (el sistema que forman los tres planos es homogéneo)

Cuando $a = 2$ o $a = -5$ se cortan los tres planos en una recta, que calculo a continuación: Cuando $a = 2$: $F_1 = F_2 + F_3$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Cuando $a = -5$:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)

$$r : \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$3x - 4y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 - 4 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

$$3x - 4y - z + 2 = 0$$

c) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 1, -1)$ Calculamos $t \perp \pi_3$ que pasa por P:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 1, -1) \\ P_t(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Obtenemos P' como punto de corte de t con π_3:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1 + x^2)} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x} = [1^\infty] = \lambda$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{-\cos x}{1-x}}{1} = -1 = \ln \lambda \Longrightarrow \lambda = e^{-1}$$

Problema 4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x - 5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

Solución:

a)

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x-5 \Longrightarrow\ du = dx \\ dv = g'(x)dx \Longrightarrow\ v = g(x) \end{array}\right] =$$

$$(x-5)g(x)]_5^6 - \int_5^6 g(x)\,dx = g(6) - 0 - g(6) = 0$$

b)

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{x/2} \Longrightarrow\ 2du = e^{x/2}dx \\ x = 0 \Longrightarrow u = 1 \\ x = 2 \Longrightarrow u = e \end{array}\right] = 2\int_1^e f(u)\,du = 1$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2014) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{2x^2+6}{x-1}=-6$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2-1}{x^2+1}=-1$$

Como $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\neq\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}$ la función tiene en $x=0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) Cuando $x<0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y=mx+n\Longrightarrow\ y=2x+2$

$$m=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=2$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=2$$

Cuando $x\geq 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y=1$

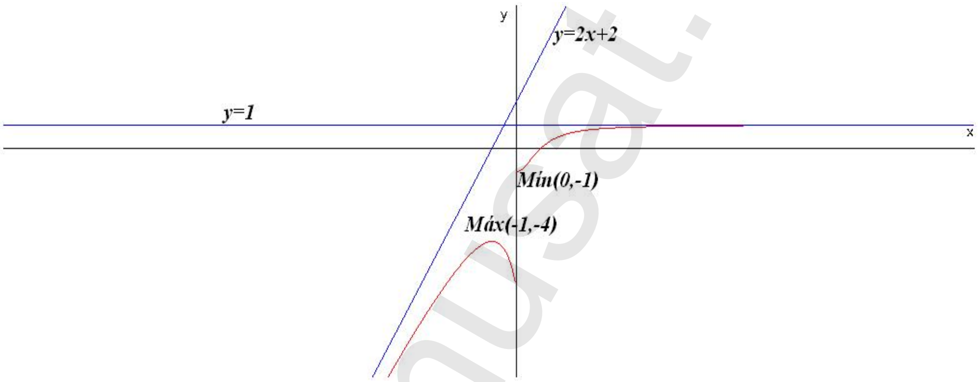
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

c)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando $x < 0: \; x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \; x = 3$ No vale. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1, -4)$

$x \geq 0: \; 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$. En $x = 0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0, -1)$



Problema 2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5, 7, -1)$$

a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

No se puede construir el triángulo.

b) Se va a calcular como intersección de dos planos:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(1, -1, 1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+2 \\ -1 & 2 & y+6 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-3 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - z + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (a+2)x + & (a+1)y = & -6 \\ x + & 5y = & a \\ x + & y = & -5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

a) $|\overline{A}| = -21a - 21 = 0 \Longrightarrow a = -1$. Si $a = -1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango($\overline{A} = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema sería incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

En este caso Rango($\overline{A} = 2 =$ Rango$(A) =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema sería compatible determinado.

b)

$$\left\{\begin{array}{c} x=-6 \\ x+y=-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-6 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right|$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{array}\right|$.

b) (1 punto). $\left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right|$.

Solución:

a)

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{array}\right| = 6\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| = -6\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| = -6$$

b)

$$\left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| +$$

$$+ \left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= -\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| - 3\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 2\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right| = 2\left|\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right| = 2$$