Examen de Matemáticas II (Junio 2014) Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1\\ & y- & z= & a\\ x+ & y- & z= & 3a^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 1 & 1 & -1 & 3a^2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=|A_1|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2\ \forall a\in\mathbb{R}$.

$$|A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 1 & a^2 \end{array}\right|=3a^2-2a-1=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=-1/3$$

$$|A_3|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 1 & -1 & 3a^2 \end{array}\right|=-3a^2+2a+1=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=-1/3$$

$$|A_4|=\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 1 & -1 & 3a^2 \end{array}\right|=0$$

En conclusión si $a\neq 1$ y $a\neq -1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A}=3\neq\text{Rango}(A)$ y el sistema sería incompatible. Por el contrario si $a=1$ o $a=-1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A}=2=\text{Rango}(A)<$ nº de incógnitas y el sistema sería compatible indeterminado.

b) Para $a=-1/3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1\\ & y- & z= & -1/3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2/3\\ y=-1/3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Para $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1\\ & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.

c) (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{mx^3 + 2}{x^3}; \quad f'(1) = 0 \Longrightarrow m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -2$$

b) Para $m = -2$: $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 1}{x^2}$

- Verticales en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales no hay: $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = -\infty$
- Oblicuas $y = mx + n$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^3} = -2$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(-2x^3 - 1x^2 + 2x\right) = 0$$

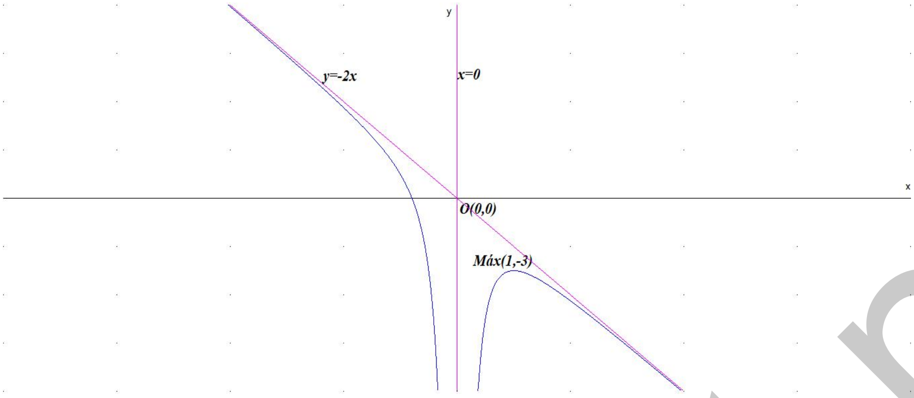
$$y = -2x$$

c) Puntos de corte con eje de ordenadas: no hay

Puntos de corte con eje de abcisas: $-2x^3 - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/\sqrt[3]{2} \Longrightarrow (-1/\sqrt[3]{2}, 0)$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 2}{x^3}; \quad f''(x) = \frac{-6}{x^4}; \quad f''(1) = -6 < 0$$

Luego hay un máximo en el punto $(1, -3)$



Problema 3 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0,0,0)$ que es tangente a π.

Solución:

a) Sean las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (a,b,c) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = c\lambda \end{array} \right.$ que se cortan en el punto $O(0,0,0)$.

Estas rectas tiene que formar un ángulo de 45º con el plano $z = 0$, es decir:

$$\sin\alpha = \frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0+0+1^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}c = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Por otro lado $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r} = (a,b,c)\cdot(2,-1,1) = 2a - b + c = 0 \Longrightarrow c = b - 2a$$

$$c^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab \Longrightarrow b^2 + 4a^2 - 4ab = a^2 + b^2 \Longrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \Longrightarrow c = b \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = (0,b,b) = b(0,1,1) \\ \\ a = \dfrac{4b}{3} \Longrightarrow c = -\dfrac{b}{3} \Longrightarrow \text{No válida} \left(-\dfrac{b}{3}\right)^2 \neq \left(\dfrac{4b}{3}\right)^2 + b^2 \end{array} \right.$$

$$r_b : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = b\lambda \\ z = b\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

b) El radio de la esfera es $r = d(O, \pi) = \dfrac{|0 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ y su centro en $O(0, 0, 0)$:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \Longrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 1$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, -4)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.

b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2, -1, 1)$.

Solución:

a) $d(A, \pi) = d(B, \pi) \Longrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2} \Longrightarrow$ $\pi : x + 2z + 3 = 0$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = 2(1, 0, 2) \\ P_r = A(2, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow Q(2 + \lambda, 1, 2\lambda)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(\lambda, 2, 2\lambda - 1)| = \sqrt{\lambda^2 + 4 + (2\lambda - 1)^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$5\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \Longrightarrow Q_1(3, 1, 2) \\ \lambda = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow Q_2\left(\dfrac{9}{5}, 1, -\dfrac{2}{5}\right) \end{array} \right.$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2014) Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 6}{1} = \dfrac{z - 8}{-3}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5, -2, 1)$ sobre el plano π.

c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1, 7, 3)$ sobre la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, -3) \\ P_r(2, -6, 8) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{u_\pi} = (5, -3, 4)$$

a) Cuando se habla de distancia de una recta a un plano entendemos que la recta es paralela al plano, si lo cortase la distancia sería cero y si está contenida en el plano también sería cero. Comprobamos el paralelismo:
$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} = (3,1,-3)\cdot(5,-3,4) = 0 \Longrightarrow$ lo que nos indica que o es paralela o está contenida en el plano.

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|10+18+32-10|}{\sqrt{25+9+16}} = 5\sqrt{2}\ u$$

b) Proyección de P sobre π:

- Calculamos la recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (5,-3,4) \\ P_t(5,-2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5+5\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{array} \right.$$

- P' proyección de P será el punto de corte de t y π:

$$5(5+5\lambda) - 3(-2-3\lambda) + 4(1+4\lambda) - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$P'\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

c) Proyección de Q sobre r:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / Q \in \pi'$:

$$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + \lambda = 0$$

$$3(-1) + 7 - 3(3) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + 5 = 0$$

- Q' proyección de Q será el punto de corte de r y π':

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \\ P_r(2,-6,8) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = -6+\lambda \\ z = 8-3\lambda \end{array} \right.$$

$$3(2+3\lambda) + (-6+\lambda) - 3(8-3\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q'(5,-5,5)$$

Problema 2 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ 2x & y & z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ y & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20$

b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -60$

c) $|B| = \begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$

$$|(BB^t)^3| = |BB^t|^3 = (|B||B^t|)^3 = (|B|^2)^3 = |B|^6 = 10^6$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

Solución:

a) $y - b = m(x-a)$, $a = 0$, $b = g(a) = g(0) = 2(f(0))^2 = 2$ y $m = g'(a) = g'(0) = 4f(0)f'(0) = 8$ (ya que $g'(x) = 4f(x)f'(x)$) Luego la recta tangente tiene de ecuación: $y - 2 = 8(x-0) \Longrightarrow y = 8x + 2$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f'(x)}{-e^{-x}} = -2$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2} = \frac{1}{4}\left(\ln|2x+1| - \ln|2x-1|\right)\Big]_1^{3/2} = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -0,1$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-1}{\ln x + \frac{x}{x} + 1} = -\frac{1}{2}$