Examen de Matemáticas II (Junio 2014)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 9/2 \\ \gamma = -3 \end{array} \right.$$

b) $\beta = \gamma = 1$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |A| = -\alpha(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0, \ \alpha = 1$$

Se trata de un sistema homogéneo:
Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible determinado y su única solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.
Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) <$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x+y=1 \\ -z=0 \\ x+y=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z = 1$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) (1 punto). Hallar la distancia de P a r.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,5,-6) \\ P_t = P(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 1-6\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P'' de t con π:

$$(1+\lambda) + 5(5\lambda) - 6(1-6\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{31}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+3/31 = 34/31 \\ y = 15/31 \\ z = 1-18/31 = 13/5 \end{array} \right. \Longrightarrow P''\left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right)$$

- El punto P'' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P':

$$\frac{P'+P}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P =$$

$$\left(\frac{68}{31}, \frac{30}{31}, \frac{26}{31}\right) - (1,0,1) = \left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31}\right)$$

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,0,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP} = (1,0,1)$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |(0,-1,0)| = 1$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{1}{1} = 1$$

c) Calculamos los puntos de corte de $\pi \equiv x+5y-6z = 1$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y=0$ y $z=0$: $A(1,0,0)$
Con OY hacemos $x=0$ y $z=0$: $B(0,1/5,0)$
Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0$: $C(0,0,-1/6)$
Luego:

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,0); \quad \overrightarrow{OB} = (0,1/5,0); \quad \overrightarrow{OC} = (0,0,-1/6)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{vmatrix}| = \frac{1}{180}\ u^3$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f: R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x=-2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x+16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4+4x^3$ y el eje OX.

Solución:

a) Por ser $x=-2$ la abcisa del punto de tangencia con la recta $y = 16x+16 \Longrightarrow f(-2) = -32+16 = -16$.
La pendiente de esta recta es $m = f'(-2) = 16$ y, por último, al ser punto de inflexión $f''(-2) = 0$.

b) $g(x) = x^4+4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = -4$

$$\int_{-4}^{0}(x^4+4x^3)\,dx = \left.\frac{x^5}{5}+x^4\right]_{-4}^{0} = -\frac{4^4}{5}$$

$$S = \left|-\frac{4^4}{5}\right| = \frac{256}{5}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-2-e^x+3\cos(3x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-e^x-9\sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2014)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a+\ln(1-x) & \text{si} \quad x<0 \\ x^2e^{-x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (a+\ln(1-x)) = \infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}(a+\ln(1-x))=a,\quad \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2}{e^x}=0\Longrightarrow a=0$$

c)

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} -\frac{1}{1-x} & \text{si} & x<0\\ xe^{-x}(2-x) & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=-1\\ f'(0^+)=0\end{array}\right.$$

Luego la función no es derivable en $x=0$. Concluimos con que f es continua y derivable en $R-\{0\}$ y sería continua en $x=0$ pero no derivable para $a=0$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi\equiv 2x-y=2$, y la recta $r\equiv \left\{\begin{array}{r} x=1\\ y-2z=2\end{array}\right.$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,2,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$2\cdot 1-(2+2\lambda)=2\Longrightarrow \lambda=-1$$

π y r se cortan en el punto $(1,0,-1)$

b) $\pi'\perp\pi,\ \ r\in\pi'$:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,0)\\ \overrightarrow{u_r}=(0,2,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & x-1\\ -1 & 2 & y-2\\ 0 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x+2y-4z-5=0$$

c) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos el plano $\pi''\parallel\pi/A\in\pi''$:

  $$\pi'':2x-y+\lambda=0\Longrightarrow -4-1+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=5\Longrightarrow \pi'':2x-y+5=0$$

- Calculamos P punto de corte de r con π'':

$$2-(2+2\lambda)+5=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{5}{2}$$

$$P\left(1,7,\frac{5}{2}\right)$$

- La recta buscada s pasa por los puntos A y P:

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AP}=(3,6,5/2)\\ P_s(-2,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=-2+3\lambda\\ y=1+6\lambda\\ z=\frac{5}{2}\lambda\end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A=\left(\begin{array}{rrr}-1&-1&a\\-3&2&a\\0&a&-1\end{array}\right), \quad \text{se pide}:$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a=2$.

Solución:

a) $|A|=-2a^2+5=0 \Longrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Si $a\neq\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

Si $a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

b) Para $a=2$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr}-1&-1&2\\-3&2&2\\0&2&-1\end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr}2&-1&2\\1&-1/3&4/3\\2&-2/3&5/3\end{array}\right)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Solución:
Sean x el precio de un cuaderno, y el precio de un rotulador y z el de un bolígrafo.

a)
$$\left\{\begin{array}{c} 5x+2y+3z=22 \\ 2x+y+6z=14 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-6+9z \\ y=26-24z \end{array}\right.$$

b) $8x+3y=8(-6+9z)+3(26-24z)=30$ euros.