**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Septiembre 2013)(coincidentes)
Selectividad-Opción A**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Hemos ido tres días seguidos al bar de la Universidad. El primer día tomamos 3 cafés, 2 refrescos de cola y 3 batidos de cacao, el precio fue de 7 euros. El segundo día tomamos 1 café, 2 refrescos de cola y 2 batidos de cacao, el precio total fue de 5 euros. Por último, el tercer día tomamos 2 cafés y un batido de cacao, el precio fue de 2 euros. Justifíquese razonadamente si con estos datos podemos determinar o no el precio de un café, de un refresco de cola y de un batido de cacao, suponiendo que estos precios no han variado en los tres días.

Solución:

Llamamos x al precio de un café, y al de un refresco de cola y z al del batido.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + z = 2 \end{cases} \implies \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right); \text{ pero } F_3 = F_1 - F_2$$

Luego en sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x = 1 - 1/2\lambda \\ y = 2 - 3/4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

- Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.
- Determinense los puntos de corte con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

- Asíntotas

■ Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \infty$
- Oblicuas: $y = mx + n \implies y = x - 1$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 3}{x + 1} = -1$$

b) Los puntos de corte con eje OX no hay y con el OY es el $(0, 3)$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \implies x = 1, \quad x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-3, -1) \cup (-1, 1)$. La función tiene un máximo local en $x = -3$ y un mínimo local en $x = 1$.

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 30 & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 + 2x + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Determinése el valor de b para que la función sea continua en R .
- Para $b = 0$, calcúlese $\int_0^3 f(x) dx$.

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x^3 - 30) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 + 2x + b) = 16 + b \implies b = -14$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^2 (4x^3 - 30) dx + \int_2^3 (3x^2 + 2x) dx = \\ &= \left[x^4 - 30x \right]_0^2 + \left[x^3 + x^2 \right]_2^3 = -20 \end{aligned}$$

Problema 4 (2 puntos) Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

- a) Determinése la probabilidad de que suceda A si sabemos que ha sucedido B .
- b) Determinése la probabilidad de que no suceda ni A ni B .

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) La longitud alcanzada por un lanzador de disco se puede aproximar por una variable aleatoria normal con media μ desconocida y desviación típica igual a 2 metros. El lanzador hace 10 lanzamientos en una prueba atlética. Considérense esos 10 lanzamientos como una muestra aleatoria simple.

- a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la distancia media obtenida por el lanzador en los 10 intentos y μ sea menor que 0,75 metros.
- b) Si la media de las distancias alcanzadas en los lanzamientos durante la prueba ha sido de 65 metros, determinése un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la distancia media μ de los lanzamientos de este atleta.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 10, \bar{X} \approx N\left(\mu; \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 0,63)$

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,75) = P\left(-\frac{0,75}{2/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{0,75}{2/\sqrt{10}}\right) =$$

$$\begin{aligned} P(-1,19 \leq Z \leq 1,19) &= P(Z \leq 1,19) - P(Z \leq -1,19) = \\ &= 2P(Z \leq 1,19) - 1 = 2 \cdot 0,89 - 1 = 0,78 \end{aligned}$$

b) $\bar{X} = 65, E = z_{\alpha/2} = 1,96$ y $n = 10$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 1,24$$

$$IC = (\bar{X} - E; \bar{X} + E) = (63,76; 66,24)$$

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Septiembre 2013)(coincidentes)
Selectividad-Opción B**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - 2ay + z = 1 \\ x + (2+a)y + z = 0 \\ 3x + a^2y + 2z = a \end{cases}$$

a) Discútase, en función del parámetro real a .

b) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 0 \\ 3 & a^2 & 2 & a \end{array} \right) \implies |A| = -a^2 - a + 2 = 0 \implies a = -2, a = 1$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^{\circ}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \implies$$

Sistema incompatible

Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 1/2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^2 , A^3 , A^{20} .

b) Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

a) Determinéense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como sus límites cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determinéense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y sus mínimos locales.

Solución:

a) El único punto de corte es el $(0,0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x) = \infty$$

b) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \implies x = 1, x = 2$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en $(1, 2)$. La función tiene un máximo local en $(1, 5)$ y un mínimo local en $(2, 4)$.

Problema 4 (2 puntos) En un avión viajan un 10 % de los pasajeros en primera clase. Del total de pasajeros del avión un 20 % son mujeres. Se sabe que los pasajeros que viajan en primera clase y además son mujeres, son el 2 % del total. Determinéense la probabilidad de que:

- a) al escoger un pasajero de primera clase al azar sea mujer.
 b) al escoger un varón del avión al azar, no viaje en primera clase.

Solución:

$$P(1) = 0,1, \quad P(2) = 0,9, \quad P(M) = 0,2, \quad P(H) = 0,8, \quad P(1 \cap M) = 0,02$$

	1	2	
H	0,08	0,72	0,8
M	0,02	0,18	0,2
	0,1	0,9	

a)

$$P(M|1) = \frac{P(1 \cap M)}{P(1)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2$$

b)

$$P(2|H) = \frac{P(2 \cap H)}{P(H)} = \frac{0,72}{0,8} = 0,9$$

Problema 5 (2 puntos) El peso de las lubinas de un año producidas en una piscifactoría se puede aproximar por una distribución normal con media 600 gramos y desviación típica 100 gramos. Las lubinas de un año están en un recinto aislado.

- a) Considérese una muestra aleatoria simple de 20 lubinas de un año en la piscifactoría, calcúlese la probabilidad de que su peso medio sea superior a 650 gramos.
 b) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 lubinas de un año. Hállese el nivel de confianza con el que se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la media: (580,4; 619,6).

Solución:

$$N(600; 100)$$

a) Tenemos $n = 20$ y $\bar{X} \approx N\left(600; \frac{100}{\sqrt{20}}\right) = N(600; 22,36)$

$$P(\bar{X} \geq 650) = P\left(Z \geq \frac{650 - 600}{100/\sqrt{20}}\right) = P(Z \geq 2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$

b) Tenemos $n = 100$ y $E = \frac{619,6 - 580,4}{2} = 19,6$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 19,6 = z_{\alpha/2} \frac{100}{\sqrt{100}} \implies z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %