Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2013) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700, \;\; 2x + 3y \leq 300, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

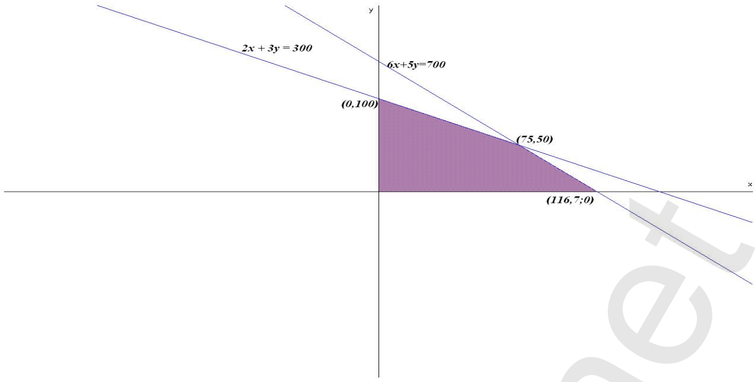
a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeto a: $\begin{cases} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$

Representación:



$$\left\{ \begin{array}{l} f(0,100) = 7650 \\ f(116,7;0) = 7560 \\ f(75,50) = 8685 \text{ Máximo} \end{array} \right.$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75, 50)$ con un valor de 8685.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$

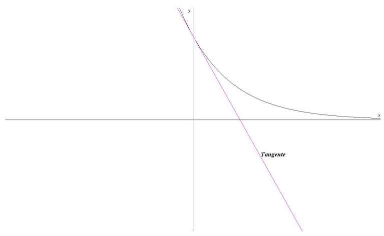
a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$

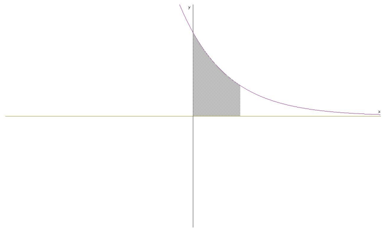
b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 0,5$ y el eje de abcisas.

Solución:

a) $f'(x) = -6e^{-2x} \Longrightarrow f'(0) = -6$ y $f(0) = 3 \Longrightarrow$

$$y - 3 = -6x \Longrightarrow 6x + y - 3 = 0$$





b)

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} (3e^{-2x}\,dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}\Big]_0^{1/2} = \frac{3(e-1)}{2e} = 0,948\,u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:
$D \equiv$ deportistas, $L \equiv$ lectores.

$$P(D \cup L) = 0,55, \;\; P(D) = 0,4, \;\; P(L) = 0,3$$

a) $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L) \Longrightarrow P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0,4 + 0,3 - 0,55 = 0,15$
$P(D \cap \overline{L}) = P(D) - P(D \cap L) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

b)
$$P(D|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

Problema 5 *(2 puntos)* El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y una desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de 3,37 Mb?.

b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

$$N(3{,}5; 1{,}4),\ \ n = 24 \longrightarrow N\left(3{,}5; \frac{1{,}4}{\sqrt{24}}\right) = N(3{,}5; 0{,}28)$$

a)

$$P(\overline{X} < 3{,}37) = P\left(Z < \frac{3{,}37 - 3{,}5}{0{,}28}\right) = P(Z < -0{,}46) = 1 - P(Z < 0{,}46) = 0{,}3228$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,56$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2{,}86; 3{,}98)$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2013) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} ax- & 2y & & = & 2 \\ 3x- & y- & z & = & -1 \\ x+ & 3y+ & z & = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right);\ \ |A| = 2a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

a) Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $a = -4$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right| = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

c) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax- & 2y & = & 2 \\ 3x- & y- & z = & -1 \\ x+ & 3y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} e^x & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$

a) Estúdiese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.

b) Determínense las asíntotas de la función.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ si $a/3 = 1 \Longrightarrow a = 3$.
Si $a \neq 3$ hay una discontinuidad no evitable:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$$

b) Asíntotas:
Si $x < 0$:

- Verticales: No hay

- Horizontales: $\lim_{x\longrightarrow -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow y = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

Si $x \geq 0$:

- Verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$
  - $x = 1$: pueden ocurrir que $a = -3$ o $a \neq -3$.
    - $a = -3$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.
    $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$
    - $a \neq -3$: Si hay asíntota
    $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$
  - Si $x = 3$ pueden ocurrir que $a = -9$ o $a \neq -9$.
    - Si $a = -9$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.
    $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{-9+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$
    - Si $a \neq -9$: Si hay asíntota:
    $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$

- Horizontales: $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = 0 \Longrightarrow y = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x(5-x)^2$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Solución:

a) $f'(x) = (x-5)(3x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5, \ \ x = \frac{5}{3}$

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 5/3) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(5/3, 5)$. Presenta un máximo en $x = 5/3$ y un mínimo en $x = 5$.

b) $f''(x) = 6x - 20 = 0 \Longrightarrow x = 10/3$

	$(-\infty, 10/3)$	$(10/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

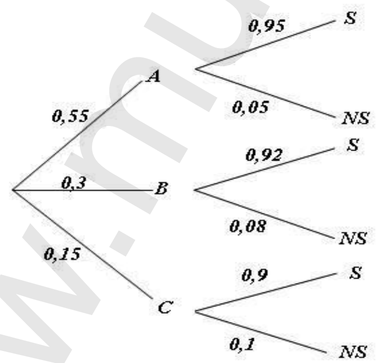
f es convexa en el intervalo $(-\infty, 10/3)$ y cóncava en $(5, +\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 10/3$.

Problema 4 *(2 puntos)* Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al satre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

Solución:



a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \dfrac{P(NS|A)}{P(NS} = \dfrac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$

Problema 5 *(2 puntos)* La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 h?

b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

Solución:

$$N(\mu, 1940); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1445{,}82 \Longrightarrow n = 1446$$

b) $n = 225$, $\overline{X} = 12415$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 212{,}75 \Longrightarrow IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (12202{,}25; 12627{,}75)$$