Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2013)(coincidentes) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=-2 \\ x+ay=-2a-1 \\ 4x+y+5z=-1 \end{array}\right.$$

1. Resuélvase en el caso $a=1$.
2. Discútase en función del parámetro $a \in R$.

Solución:

1. Si $a=1$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=-2 \\ x+y=-3 \\ 4x+y+5z=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

2.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & a & 0 & -2a-1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right); \quad |A|=-7a-7=0 \Longrightarrow a=-1$$

- Si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right); \quad |A|=0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como $|C_1,C_2,C_3|=|C_1,C_2,C_4|=|C_1,C_3,C_4|=|C_2,C_3,C_4|=0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$. Como $\text{Rango}(A)=2\text{Rango}(\overline{A})<\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Problema 2 *(2 puntos)* Calcúlese la derivada de cada una de las funciones siguientes ($\ln x$ denota al logaritmo neperiano de x):

1. $f(x)=(x^3+2x)\cdot \ln x$

www.musat.net

2. $g(x) = \dfrac{2x}{x-1} \cdot e^{x^2}$

Solución:

1. $f'(x) = (3x^2+2)\ln x + \dfrac{x^3+2x}{x} = (3x^2+2)\ln x + x^2 + 2$

2. $g'(x) = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} \cdot e^{x^2} + \dfrac{2x}{x-1} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2e^{x^2}(2x^3-2x^2-1)}{(x-1)^2}$

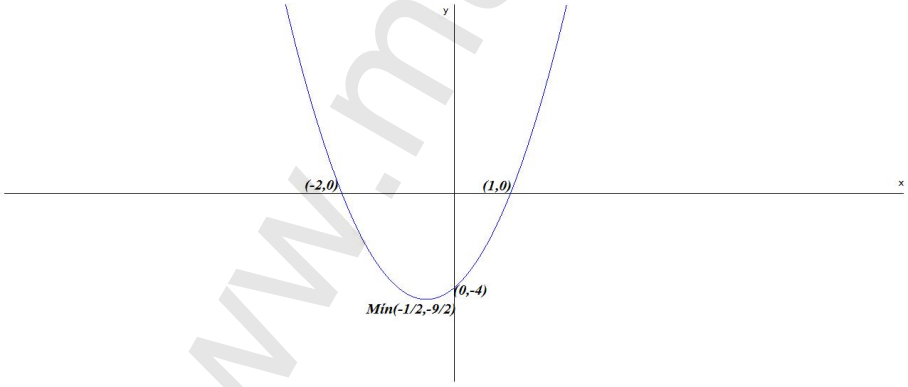
Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

1. Represéntense gráficamente f.

2. Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

1. Puntos de corte: $(0,-4)$, $(1,0)$ y $(-2,0)$; $f'(x) = 4x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, $f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(-1/2) = 4 > 0 \Longrightarrow (-1/2, -9/2)$ es un mínimo. Su gráfica:



2. $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x^2+2x-4)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-2) = -9$$

$$S = |S_1| = 9\ u^2$$

www.musat.net

Problema 4 *(2 puntos)* En un instituto se imparten únicamente dos lenguas extranjeras: inglés y francés. El 72 % de los alumnos de ese instituto estudia inglés y el 42 % estudia francés. Todos los alumnos estudian al menos una lengua extranjera. Si se elige un alumno al azar, calcúlese la probabilidad de que:

1. Estudie inglés y francés.
2. Estudie inglés, y no estudie francés.

Solución:

$$P(I) = 0,72; \quad P(F) = 0,42$$

1. $P(I \cup F) = 1 = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Longrightarrow$
   $1 = 0,72 + 0,42 - P(I \cap F) \Longrightarrow P(I \cap F) = 0,14$
2. $P(I \cap \overline{F}) = P(I) - P(I \cap F) = 0,72 - 0,14 = 0,58$

Problema 5 *(2 puntos)* La altura en centímetros de los individuos de una población se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 20 cm.

1. En una muestra aleatoria simple de 500 individuos se ha obtenido una altura media de 174 cm. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ
2. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ; al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 5 cm?

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

1. $n = 500$, $\overline{X} = 174$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{100}} = 1,753$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (172,247; 175,753)$$

2. $E = 2,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$2,5 = 1,645\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 20}{2,5}\right)^2 = 173,1856 \Longrightarrow n = 174$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2013)(coincidentes) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

www.musat.net

Problema 1 *(2 puntos)* Encuéntrese la matriz X que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = BX + C \Longrightarrow X = (A-B)^{-1}C$$

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

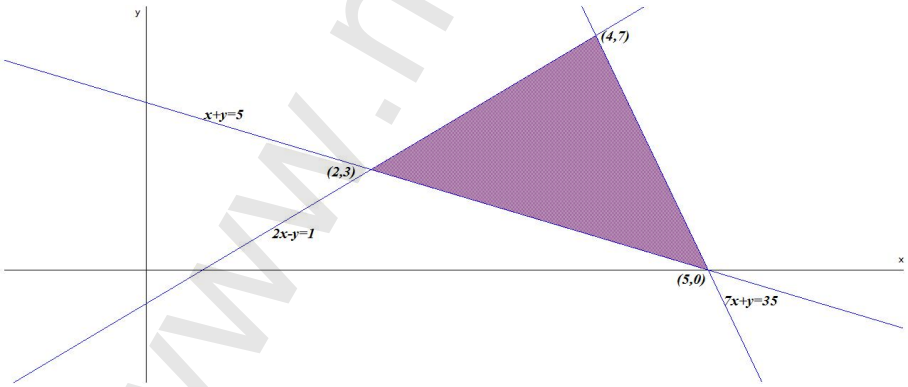
Problema 2 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

$$S : \begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \geq 5 \\ 7x + y \leq 35 \end{cases}$$

1. Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
2. Calcúlense los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ sobre la región C, determinando los puntos donde se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

1. La región C pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(5, 0)$, $(2, 3)$, y $(4, 7)$.

2.

$$\begin{cases} f(5,0) = 15 \text{ Máximo} \\ f(2,3) = 0 \\ f(4,7) = -2 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es -2 y se alcanza en el punto $(4, 7)$ y el máximo en el $(5, 0)$ con 15.

www.musat.net

Problema 3 *(2 puntos)* Supongamos que el consumo eléctrico de un país (expresado en gigavatios) entre las 0 y las 8 horas viene dado por la función $c(x) = 10x - x^2 + 16$, con $0 \leq x \leq 8$.

1. Determínese cuáles son el consumo máximo y el mínimo en ese intervalo de tiempo, y los instantes en los que se alcanzan.

2. Calcúlese $\frac{\int_0^8 c(x)\,dx}{8}$ (que representa el consumo medio a lo largo de esas 8 horas).

Solución:

1. $c'(x) = -2x + 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$ como $c''(x) = -2 \Longrightarrow c''(5) = -2 < 0 \Longrightarrow (5, 41)$ es un máximo local. Apartir de este punto la función empieza a decrecer hasta llegar al punto de corte de la función $c(x)$ con la recta $x = 8$ sería $(8, 32)$ y con la recta $x = 0$ sería $(0, 16)$. El consumo mínimo es a las 0 horas con 16 gigavatios y el máximo a las 5 horas con 41 gigavatios.

2. $\frac{1}{8}\int_0^8 c(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^8 (10x - x^2 + 16)dx = \frac{1}{8}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3} + 16x\right)\Big]_0^8 = \frac{104}{3}$

Problema 4 *(2 puntos)*

1. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$, determínese la probabilidad de A condicionado a que B haya ocurrido.

2. Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,5$ y que C y D son incompatibles, determínese $P(C \cup D)$.

Solución:

1. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

2. C y D incompatibles $\Longrightarrow P(C \cap D) = 0$, luego $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0,4 + 0,5 - 0 = 0,9$

www.musat.net

Problema 5 *(2 puntos)* Una envasadora empaqueta naranjas en bolsas. Para realizar un control de calidad, se tomó una muestra del peso real de 8 bolsas y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$2,4 \quad 1,8 \quad 2 \quad 2,4 \quad 2,2 \quad 2 \quad 1,6 \quad 2,2$$

El peso de las bolsas que salen de esa planta de envasado se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 0,5 kg.

1. Obténgase un intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional μ
2. Hállese el error máximo que se cometería en la estimación de μ usando el intervalo de confianza anterior.

Solución:

1. Tenemos $\overline{X} = 2,075$, $\sigma = 0,5$, $n = 8$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,729; 2,421)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{8}} = 0,346$$

2. $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,346$

www.musat.net