

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Diciembre 2012

Problema 1 Sean los vectores $\vec{u} = (m, 1, -3)$, $\vec{v} = (2, m, -5)$ y $\vec{w} = (0, -m, 1)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ 2 & m & -5 \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix} = -4m^2 + 6m - 2 = 0 \implies m = 1, m = \frac{1}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = 1/2$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\vec{u} = (3, m, -1)$ y $\vec{v} = (4m, -1, m + 1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\vec{u} = (3, -1, 0)$ y a $\vec{v} = (2, 1, -1)$ que tenga módulo 5.
3. Decidir si los vectores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12m - m - m - 1 = 0 \implies m = \frac{1}{10}$

2.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 5) \implies |\vec{w}| = \sqrt{35}$$

$$\vec{t} = \frac{5}{\sqrt{35}}(1, 3, 5) = \left(\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{3\sqrt{35}}{7}, \frac{5\sqrt{35}}{7} \right)$$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 - 3 + 6 = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1, 3)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\vec{v}$.
3. Altura del paralelepípedo.
4. Volumen del tetraedro que determinan.
5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\vec{v}$.
6. Altura del tetredro.

Solución:

1.

$$V_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \ u^3$$

2.

$$S_p = |\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = |(1, 8, 3)| = \sqrt{74} \ u^2$$

$$S_p = |\vec{v}| \cdot h_p \implies h_p = \sqrt{\frac{37}{5}} \ u$$

3.

$$V_p = S_p \cdot H_p \implies H_p = \frac{\sqrt{74}}{74} \ u$$

4.

$$V_t = \frac{1}{6} \ u^3$$

5.

$$S_t = \frac{\sqrt{74}}{2} \ u^3, \quad h_t = h_p = \sqrt{\frac{37}{5}} \ u$$

6.

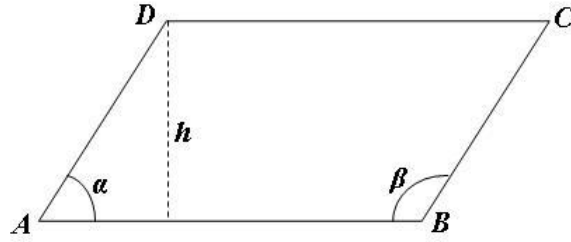
$$H_t = H_p = \frac{\sqrt{74}}{74} \ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(3, -1, 0)$, $B(4, 1, -2)$ y $C(8, 1, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Encontrar el 4º vértice D .
2. Calcular la longitud de sus lados.
3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C .
5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (3, -1, 0) + (4, 0, 11) = (7, -1, 11)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(1, 2, -2)| = 3$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(4, 0, 11)| = \sqrt{137}$
- 3.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-18}{3 \cdot \sqrt{137}} \Rightarrow \alpha = 120^\circ 50' 17'' \text{ y } \beta = 59^\circ 9' 43''$$

El centro es $M\left(\frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2}\right)$

$$4. C = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2C - A = (13, 3, 18)$$

5.

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$$

$$A_1 = A + \vec{u} = (3, -1, 0) + \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 3\right) = \left(\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$A_2 = A_1 + \vec{u} = \left(\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 3\right) = \left(\frac{19}{3}, \frac{1}{3}, 6\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \vec{u} = \left(\frac{19}{3}, \frac{1}{3}, 6\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 3\right) = (8, 1, 9)$$