

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2013)
Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A .
- b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?
- c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial

$$AX = B.$$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si, $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Problema 2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{m} = z$, se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m .
- b) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- c) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el punto de corte de r y π .

Solución:

$$r_m : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + m\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \pi : x - 2y + z = 6$$

a) $(1 + 2\lambda) - 2(-2 + m\lambda) + \lambda = 6 \implies \lambda = \frac{1}{3 - 2m}$:

Si $m = \frac{3}{2} \implies r$ y π son paralelos, en caso contrario se cortan en un punto.

b) Para $m = -2$:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, -2, 1) \\ \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ P_r(1, -2, 0) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : y+2z+2=0$$

c) Para $m = -2 \implies \lambda = \frac{1}{3 - 2m} = \frac{1}{7}$:

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{16}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a , b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abscisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \implies c = 1 \\ f'(1) = 0 \implies 3 + 2a + b = 0 \\ f''(2/3) = 0 \implies 4 + 2a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \implies f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

b)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(1) = 2 > 0 \implies \text{en } x = 1 \text{ hay un mínimo.}$$

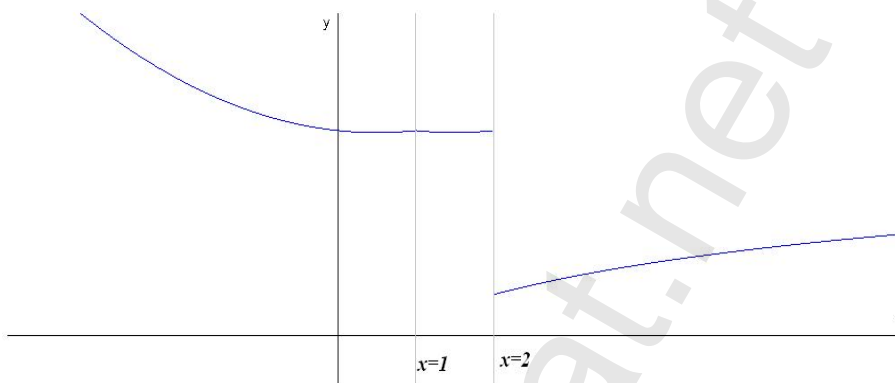
Problema 4 (2 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & \text{si } x \leq 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.
 b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:



- a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 25) = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2}) = 25$$

$$f(1) = 25$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2}) = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{5 \ln(1+x^2)}{\ln 5} \right) = 5$$

Luego $f(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$, hay un salto.

- b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{5(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+29}} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{10x}{(x^2+1) \ln 5} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = -1$ luego no es derivable en $x = 1$.

Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.

En resumen, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2013)
Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.
- b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.
- c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{2x(1 - \alpha)}{(x^2 + 1)^2}$

$$b = f(1) = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad m = f'(1) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

$$y - \frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 - \alpha}{2}(x - 1)$$

b) $m = 0 \implies 1 - \alpha = 0 \implies \alpha = 1$

c) Si $\alpha = 2$ tenemos $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, es una función par, con corte con OY en $(0, 2)$ y siempre positiva.
- Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 1$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$ y por tanto no hay oblicuas.
- Monotonía: $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

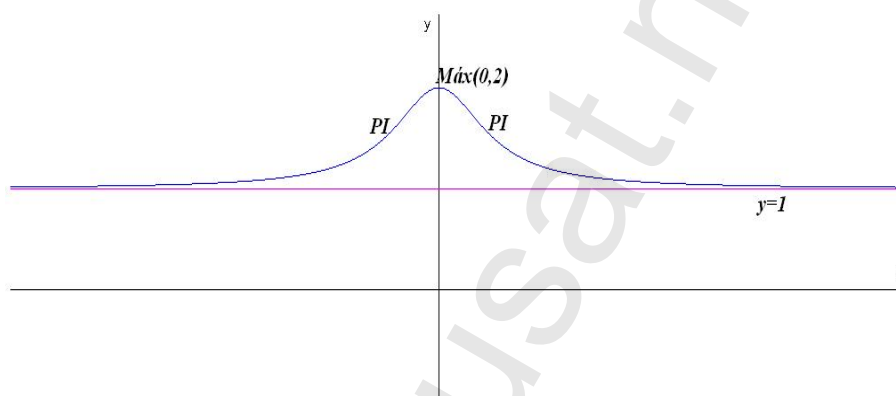
La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$.

$$\blacksquare f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$

Convexa: $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$



Problema 2 (3 puntos) Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por: $\pi_a \equiv x + 2y + az - 1 = 0$ (al variar a en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{2}$, se pide:

- (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .
- (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a , y en caso afirmativo calcular dichos valores de a .
- (1 punto). Si $a = 1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \pi_a : x + 2y + az - 1 = 0$$

a) $\vec{u}_r \perp \vec{u}_{\pi_a} \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_{\pi_a} = 0:$

$$(2, 1, 2) \cdot (1, 2, a) = 2 + 2 + 2a = 0 \implies a = -2$$

b) $\vec{u}_r \parallel \vec{u}_{\pi_a} \implies \vec{u}_r = \lambda \vec{u}_{\pi_a}$:

$(2, 1, 2) = \lambda(1, 2, a) \implies 2 = \lambda, 1 = 2\lambda \text{ y } 2 = \lambda a$, lo que es imposible.

c) $P_r(1 + 2\lambda, -3 + \lambda, 2\lambda)$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 2\lambda + 2(-3 + \lambda) + 2\lambda - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6} \implies |\lambda - 1| = 1$$

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 1 \implies \lambda = 2 \implies P_1(5, -1, 4) \\ \lambda - 1 = -1 \implies \lambda = 0 \implies P_2(1, -3, 0) \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -6 \\ 2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} =$$

$$6x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 6x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = -6x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -6x(2-x) = 6 \implies$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Problema 4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 3x + 2y + az = 0 \\ 7x + 9y + 9z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a .

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix} \implies |A| = 7a^2 - 36a + 5 = 0 \implies a = 5, a = 1/7$$

Si $a \neq 5$ y $a \neq 1/7 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible determinado. Solución trivial ($x = y = z = 0$)

Si $a = 5$ o $a = 1/7$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para Si $a = 5$:

$$\begin{cases} x+ & 5y- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & 5z = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -27/13\lambda \\ y = 8/13\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$