Examen de Matemáticas II (Junio 2013) Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z = & 2\lambda \\ x+ & y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & -3 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5\lambda + 15 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

Si $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \left|\begin{array}{cc} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\left|\begin{array}{ccc} -3 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para un $\lambda \neq -3$ cualquiera:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right|}{5\lambda + 15} = \frac{2\lambda + 3}{\lambda + 3}; \quad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc} \lambda & 2\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right|}{5\lambda + 15} = 0; \quad z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} \lambda & 2 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right|}{5\lambda + 15} = -\frac{\lambda}{\lambda + 3}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases}$, (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Solución:

$$r_a : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r_a : \begin{cases} x = 3 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

a) $r_a : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ P_{r_a}(3,0,0) \end{cases}$ todas las rectas de la familia se cortan en el punto $P_{r_a}(3,0,0)$.

b) π_a tal que $r_a \subset \pi_a$ y $P(0,0,1) \in \pi_a$:

$$\pi_a : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ \overrightarrow{PP_{r_a}} = (3,0,-1) P(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_a : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ a & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_a : x - ay + 3z - 3 = 0$$

El punto P y el punto Q pertenecen al plano y, por tanto, la recta que los une para cualquier valor de a.

c) $d(O, \pi_a) = \dfrac{|-3|}{\sqrt{10 + a^2}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

a)
$$f(x)=e^{-x}-x\Longrightarrow f'(x)=-e^{-x}-1\Longrightarrow f''(x)=e^{-x}$$
$$P(x)=ax^2+bx+c\Longrightarrow P'(x)=2ax+b\Longrightarrow P''(x)=2a$$
$$\left\{\begin{array}{l} P(0)=f(0)=c=1\\ P'(0)=f'(0)=b=-2\\ P''(0)=f''(0)=2a=1\Longrightarrow a=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow P(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

b) La función f es continua en $\mathbb{R}$, además.
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(e^{-x}-x)=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(e^{-x}-x)=-\infty$$
la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ y por el teorema de Bolzano aseguramos que $\exists\, c\in\mathbb{R}/f(c)=0$.
La función f es siempre decreciente ya que $f'(x)=-e^{-x}-1<0$ y, por tanto, ese punto c es único.

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} a & \text{si} & x<0\\ 1+xe^{-x} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x=0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} a=a\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(1+xe^{-x})=1\end{array}\right. \Longrightarrow a=1$$
Derivabilidad en $x=0$: $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x<0\\ e^{-x}(1-x) & \text{si} & x>0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=1\end{array}\right. \Longrightarrow$
f no es derivable en $x=0$.

b) $\displaystyle\int(1+xe^{-x})\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right]=x-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=$
$x-xe^{-x}-e^{-x}=x-e^{-x}(x+1)$
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} a\,dx+\int_{0}^{1}(1+xe^{-x})\,dx=[ax]_{-1}^{0}+\left[x-e^{-x}(x+1)\right]_0^1=$$
$$a+(1-2e^{-1})-(-1)=a+2(1-e^{-1})$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2013) Selectividad-Coincidentes-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x), \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ presenta una discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-7, 3, 5) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(2, 3, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (2, 3, 0)$$

a) $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 47$ luego las rectas r y s se cruzan.

b) $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -7 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(-2, -17, -13)| = \sqrt{462}$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{47}{\sqrt{462}} = \frac{47\sqrt{462}}{462} \; u$$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi$:

$$\pi : 2x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + y + z = 0$$

- Calculamos O' punto de corte del plano π con la recta s:

$$s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow 2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \Longrightarrow$$

$$O'\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{7}{6}\right)$$

- $\dfrac{O + O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{11}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar $\det \left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar $\det \left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1 \; c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Solución:

a) $|B^{-1}A^2B^2| = |B^{-1}||A^2||B^2| = |B|^{-1}|A|^2|B|^2 = \dfrac{1}{3}\cdot 25\cdot 9 = 75$

b) $\left|\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]\right| = \left|\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) A\right]\right| =$
$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot |A| = 30$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c_1\ c_2)$, tenemos $AX = (c_1) \Longrightarrow X = A^{-1}(c_2)$:

Como $|A| = 5 \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -cb+ad \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

Solución:

a) $|A| = (\lambda+1)(4\lambda-3) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1,\ \ \lambda = 3/4$. La matriz es invertible para cualquier valor distinto de de los calculados anteriormente.

b) Si $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$