Examen de Matemáticas II (Junio 2013)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ P_s(1,0,3) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,3)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) La recta h la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (2,-1,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P(-1,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & y \\ -2 & 1 & z-2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - 4y + 3z = 5$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (2,0,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ P(-1,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y - 2z = -5$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = 5 \\ x - y - 2z = -5 \end{array} \right.$$

c)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

La recta t la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x+y-2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : z = 3$$

$$t : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax+ & 7y+ & 5z = & 0 \\ x+ & ay+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 2$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A)=2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $a=2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A)=2$.

$$|A_1| = |A| = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(A)=$ Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado(infinitas soluciones).

b) Para $a=4$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x+ & 7y+ & 5z = & 0 \\ x+ & 4y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right.$$

c) Para $a=2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x=2$.

Solución:

a)

- Verticales: $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} - x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9}\right) = 6 \Longrightarrow y = x + 6$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}$ en el punto de abcisa $x = 2$ el valor de la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 28$ y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 8)$, la recta buscada en su ecuación punto pendiente será:

$$y - 8 = 28(x - 2)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^2 \frac{3 - x^2 + x^4}{x^3}\,dx$$

Solución:

a)

$$\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \int \frac{x}{x^2+9}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+9| - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

b)

$$\int_1^2 \frac{3 - x^2 + x^4}{x^3}\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x^2} - \ln|x|\right]_1^2 = \frac{21}{8} - \ln 2$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2013) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c) (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Solución:

a)

$$f'(x) = -2\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \;\; k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -4\cos 2x$:

$$f''(0) = -4 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo absoluto}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

b)

$$f''(x) = -4\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \;\; k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 8\sin 2x$:

$$f'''(\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = \pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(-\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\,dx = x + \frac{\sin 2x}{2}\bigg]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

Solución:

a) $|A| = \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$. Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ por tanto la solución del sistema sistema $XA = B \Longrightarrow X = BA^{-1}$ tiene solución única.

b) Si $\lambda = 4$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad X = BA^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2/5 & 3/5 & 11/5 \\ 3/5 & 7/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

c) $|A^2B| = |A||A||B| = -(\lambda + 1)^2$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$ con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-3}{2}$$

Solución:

a)

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(4,6,2)) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 26 \Longrightarrow (4+2\lambda-1)^2+(6+\lambda-2)^2+(2+\lambda+1)^2 = 26 \Longrightarrow$$

$$\lambda = -\frac{1}{3},\ \ \lambda = -4 \Longrightarrow P'\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right),\ \ P''(-4,2,-2)$$

b)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(1,-2,3)) \end{cases},\ \ \overrightarrow{P_rQ} = (-3,3,-3)$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}| = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right| = |9(1,0,-1)| = 9\sqrt{2}$$

$$d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}\ u$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1,0,-1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π.

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π.

Solución:

a)

$$r \equiv \begin{cases} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(0,1,-3) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x+y-z = 2$$

b)

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Longrightarrow \alpha = 19^{\circ}6'24''$$