Examen de Matemáticas II (Junio 2013) Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z= & 2\lambda \\ x+ & y+ & z= & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z= & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ x-ay-3=0 \end{array}\right.$, (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x-ay+3z=3$ es $1/2$.

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=e^{-x}-x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x)=ax^2+bx+c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0)=f(0)$, $P'(0)=f'(0)$, $P''(0)=f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene una única solución real.

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} a & \text{si} & x<0 \\ 1+xe^{-x} & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Examen de Matemáticas II (Junio 2013) Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar $\det \left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar $\det \left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.