

## Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Mayo 2013

---

---

**Problema 1** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4ax^2 - bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar  $a$  y  $b$  de manera que  $f$  cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo  $[0, 2]$ . Encontrar aquellos puntos que el teorema asegure su existencia.

**Solución:**

1.  $f$  es continua en ambas ramas, para cualquier valor de  $a$  y  $b$ , hay que calcular  $a$  y  $b$  para afirmar la continuidad en  $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4ax^2 - bx + 1) = 4a - b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + 2bx - 2) = a + 2b - 2 \end{cases} \implies a - b = -1$$

2.  $f$  es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de  $a$  y  $b$ , hay que calcular  $a$  y  $b$  para afirmar la derivabilidad en  $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 8ax - b & \text{si } x < 1 \\ 2ax + 2b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f'(1^-) = 8a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{cases} \implies 2a - b = 0$$

- 3.

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
$$f'(x) = \begin{cases} 8x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo  $[0, 2]$  y derivable en el  $(0, 2)$ . El Teorema afirma que existe al menos un punto  $c \in (0, 2)$  que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9}{2}.$$

Si cogemos la primera rama  $c < 1$ :

$$f'(c) = 8c - 2 = 9/2 \implies c = 13/16 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama  $c \geq 1$ :

$$f'(c) = 2c + 4 = 9/2 \implies c = 1/4 \text{ no vale}$$

El punto  $c \in (0, 2)$  al que hace referencia el teorema es  $c = 13/16$ .

**Problema 2** Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto  $(0, 3)$ , tenga un extremo relativo en  $x = -1$  y un punto de inflexión en  $(1, 2)$

**Solución:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

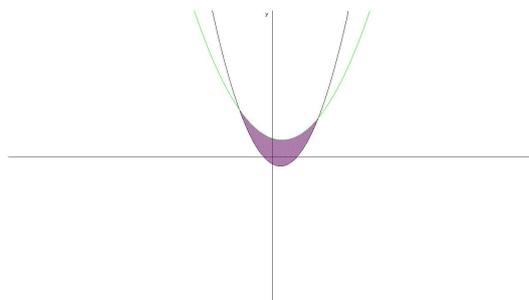
$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies d = 3 \\ f(1) = 2 \implies a + b + c + d = 2 \\ f'(-1) = 0 \implies 3a - 2b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/11 \\ b = -3/11 \\ c = -9/11 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{11}x^3 - \frac{3}{11}x^2 - \frac{9}{11}x + 3,$$

$f''(-1) = -6a + 2b = -\frac{6}{11} - \frac{6}{11} = -\frac{12}{11} < 0 \implies$  el extremo en el punto donde  $x = -1$  es un máximo.

**Problema 3** Hallar el área encerrada por las funciones  $f(x) = 2x^2 - 5x - 10$  y  $g(x) = x^2 - 3x + 25$ .

**Solución:**



$$f(x) = g(x) \implies 2x^2 - 5x - 10 = x^2 - 3x + 25 \implies x = -5, \quad x = 7$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^2 - 2x - 35) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 35x$$

$$S = \int_{-5}^7 (f(x) - g(x)) dx = H(7) - H(-5) = -288$$

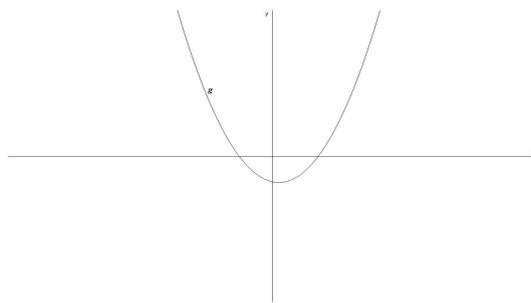
$$S = |S| = 288 u^2$$

**Problema 4** Dada la función  $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$  se pide:

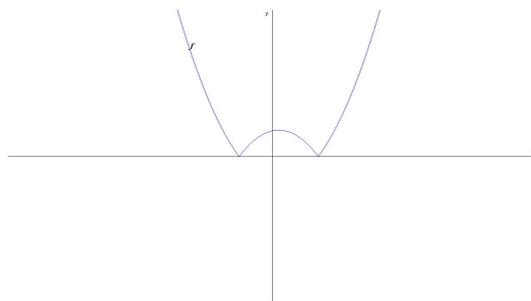
1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

**Solución:**

1. Llamamos  $g(x) = x^2 - 2x - 35$  y la representamos gráficamente:



La función  $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$  no puede tener recorrido por debajo del eje de abscisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 35 & \text{si } x < -5 \\ -x^2 + 2x + 35 & \text{si } -5 \leq x < 7 \\ x^2 - 2x - 35 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo  $\mathbb{R}$  pero no sería derivable en los puntos  $x = -5$  y  $x = 7$  donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de  $f$ .