Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente-Junio 2012) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Para $k = 4$, calcúlese el determinante de la matriz $3A^2$.
2. Para $k = 2$, calcúlese (si existe) la matriz inversa A^{-1}.
3. Discútase la existencia de solución del sistema lineal $AX = B$ según los diferentes valores del parámetro k.

Solución:

$$|A| = 2k - 6$$

1. Si $k = 4$: $|3A^2| = 3^3 \cdot |A|^2 = 108$
2. Si $k = 2$:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$
3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k & 1 \end{array}\right), \ |A| = 2k - 6 = 0 \Longrightarrow k = 3$$
   - Si $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
   - Si $k = 3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right), \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ el sistema en Incompatible.

Problema 2 *(3 puntos)*) Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{4-2x}{x^2}$.

1. Determínense los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.
2. Hállense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de f.
3. Determínense las asíntotas y los puntos de corte con los ejes. Esbócese la gráfica de f.

Solución:

1. $$f'(x) = \frac{2x-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(0, 4)$.

Hoy un mínimo local en el punto $(4, -1)$.

2. $$f''(x) = \frac{24-4x}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	convexa	cóncava

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ y es cóncava en el intervalo $(6, \infty)$.

Hay un punto de inflexión en el punto $(6, -2/9)$.

3. - Puntos de corte: Con el eje de ordenadas no hay y con el eje de abcisas $4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$, se trata del punto $(2, 0)$.

- Asíntotas:

  a) Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

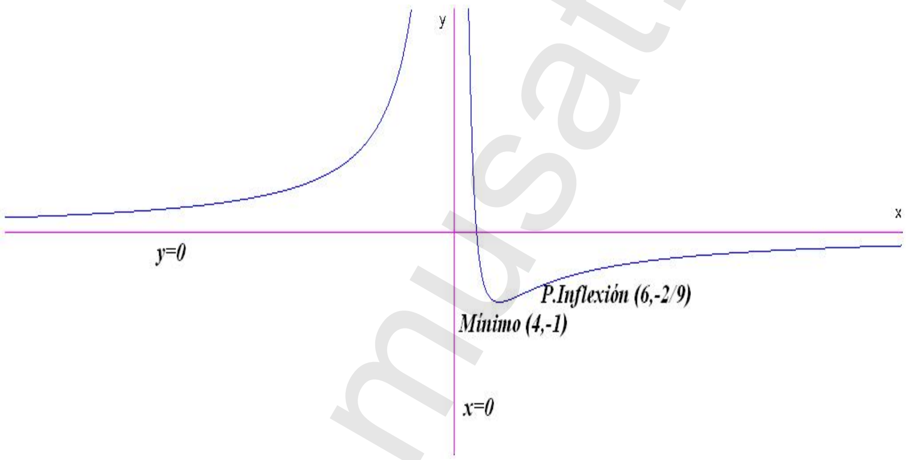
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

  b) Verticales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = 0$$

  c) Oblicuas no hay por haber horizontales.

4. Representación gráfica:



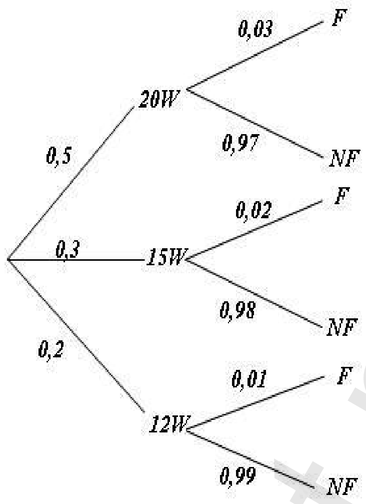
Problema 3 *(2 puntos)* Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02 para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

1. Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

2. Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Solución:

$$P(20W) = 0,5, \quad P(15W) = 0,3, \quad P(12W) = 0,2$$



1.

$$P(F) = P(20W)P(F|20W) + P(15W)P(F|15W) + P(12W)P(F|12W) =$$

$$0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,023$$

2.

$$P(20W|F) = \frac{P(F|20W)P(20W)}{P(F)} = \frac{0,03 \cdot 0,5}{0,023} = 0,652$$

Problema 4 *(2 puntos)* El consumo anual de carne en un cierto país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica 16 kg.

1. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 residentes y se obtiene un consumo medio de 42 kg de carne al año. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el consumo anual medio de carne en dicho país.

2. ¿Qué tamaño mínimo debería tener la muestra para garantizar, con el mismo nivel de confianza, que el error de la estimación del consumo anual medio sea menor que 1 kg?

Solución:

1. Tenemos $n = 64$, $\overline{X} = 42$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (38{,}71; 45{,}29)$$

2. Tenemos $E = 1$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 692{,}34$$

Luego $n = 693$.

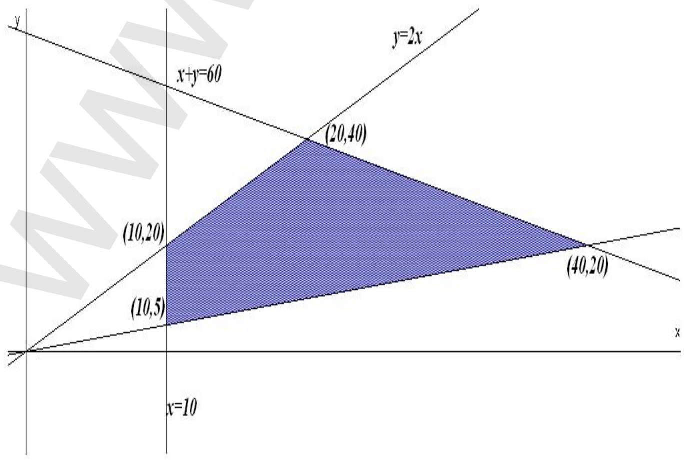
Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente-Junio 2012) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista.
¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

Solución:

Sean: x : plazas en clase turista. y : plazas en primera clase. Hay que



maximizar $z(x, y) = 40x + 75y$ sujeto a las restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} y \leq 2x \\ y \geq x/2 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} z(20, 40) = 3800 \\ z(40, 20) = 3100 \\ z(10, 5) = 775 \\ z(10, 20) = 1900 \end{array}\right.$$

El ingreso máximo se obtiene ofreciendo 20 plazas de turista y 40 de primera clase, con un total de 3800 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}$$

1. Hállense los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tenga como ecuación $y = 3x - 2$.

2. Hállense los valores de a y b para que la función f tenga en (1,0) un punto de inflexión.

3. Hállense los valores de a y b de manera que f no tenga asíntotas y $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}, \quad f'(x) = 2ax + \frac{b}{x^2}, \quad f'(x) = 2a - \frac{2b}{x^3}$$

1.
$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 3 \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4/3 \\ b = 1/3 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow a = b$$

3. Para que no tenga asíntotas: $b = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{3} = 1 \Longrightarrow a = 3$$

Problema 3 *(2 puntos)* Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian obligatoriamente Inglés y Francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado Inglés, 14 han aprobado Francés y 6 han aprobado los dos idiomas.

1. Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado ni Inglés ni Francés?

2. Se elige un estudiante al azar de entre los aprobados de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Inglés?

Solución:

LLamamos I al suceso aprobar inglés y F al de aprobar francés.

$$P(I) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5},\ \ P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15},\ \ P(I \cap F) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

1.
$$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - (P(I) + P(F) - P(I \cap F)) = \frac{1}{15} = 0,133$$

2.
$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media en una muestra aleatoria simple de tamaño 100 elementos.

1. Determínese el valor de σ sabiendo que $I = (125,2; 144,8)$ es un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional μ.

2. Si $\sigma = 20$, calcúlese la probabilidad $P(1 < \mu - \overline{X} < 4)$.

Solución:

1. $N(\mu, \sigma)$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $E = \dfrac{144{,}8 - 125{,}2}{2} = 9{,}8$:
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8 = 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Longrightarrow \sigma = 50$$

2. $P(1 < \mu - \overline{X} < 4) = P(0,5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0{,}5) = 0,286$