Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS) (Recuperación)

Mayo 2012

Problema 1 Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

Solución:

$$z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 12,875$$

Luego $n = 13$

Problema 2 Se probaron 10 automóviles, escogidos al aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en características similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros por cada 100 kilómetros, fué de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

(Madrid 2004)

Solución:

$$z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}26, 7{,}74)$$

Problema 3 *(6 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} kx- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & kz = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de k.

2. Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

3. Resúelvase el sistema para $k = 0$.

(Madrid (Junio 2010))

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2+k+2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \;\; k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|c_1c_2c_3| = |c_1c_3c_4| = |c_1c_2c_4| = |c_2c_3c_4| = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} + \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

3. Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Problema 4 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow x = \pm 4 \Longrightarrow (4, 0)\ (-4, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) =$ no existe, luego no hay.
3.

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ Es IMPAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 - 16}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - 16}{x} = \left[\frac{-16}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 16}{x} = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 16}{x} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 16}{x^2} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay extremos}$$

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f\text{creciente en } R - \{0\}$$

7.

$$f''(x) = \frac{-32}{x^3} \neq 0$$

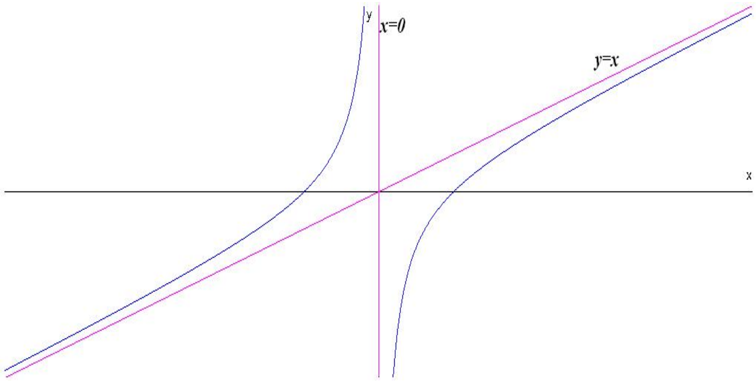
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$+$	$-$
y	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, 0)$

Convexa: $(0, +\infty)$

8. Representación:



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

   Como $f(2) = -6$ las rectas pasan por el punto $(2, -6)$.

   Como $m = f'(2) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y + 6 = 5(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y + 6 = -\frac{1}{5}(x - 2)$$