

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Marzo 2012

Problema 1 (2 puntos). Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto a la recta r de ecuación

$$r : x - 1 = \frac{y + 3}{2} = \frac{z + 1}{2}$$

(Andalucía Junio de 2011)

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula un plano π perpendicular a r que contenga al punto A :

$$x + 2y + 2z + \lambda = 0 \implies -3 + 2 + 12 + \lambda = 0 \implies \lambda = -11$$

El plano es $\pi : x + 2y + 2z - 11 = 0$

- Calculamos el punto de corte entre π y r :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \implies (1 + \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 11 = 0 \implies \lambda = 2$$

luego el punto $A'(3, 1, 3)$.

- Tenemos:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \implies A'' = 2A' - A = 2(3, 1, 3) - (-3, 1, 6) = (9, 1, 0)$$

Problema 2 (3 puntos). Considera los puntos $A(1, 0, -1)$ $B(2, 1, 0)$, y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

1. (1,5 punto). Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B .
2. (1,5 punto). Determina si la recta que pasa por $P(1, 2, 1)$ y $Q(3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

(Andalucía Junio de 2011)

Solución:

1.

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1), \quad \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ A(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies y-z-1=0$$

2. Sustituyo P en $\pi \implies 2 - 1 - 1 = 0 \implies P \in \pi$.

Sustituyo Q en $\pi \implies 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0 \implies P$ no pertenece a π .

Luego la recta que une P y Q no está contenida en π .

Problema 3 (3 puntos)

1. (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

2. (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

(Madrid Junio de 2011)

Solución:

1. Llamamos A al punto intersección de π con r_1 :

$$2x + 3x + 7x = 24 \implies x = 2 \implies A(2, 2, 2)$$

Llamamos B al punto intersección de π con r_2 :

$$2x = 24 \implies x = 12 \implies B(12, 0, 0)$$

Llamamos C al punto intersección de π con r_3 :

$$3y = 24 \implies y = 8 \implies B(0, 8, 0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) \quad \overrightarrow{OB} = (12, 0, 0) \quad \overrightarrow{OC} = (0, 8, 0)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 32u^3$$

2. Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_{r_4} \times \vec{u}_{r_5} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, -3, -1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_4} = (1, 2, -2) \\ P_{r_4}(-1, 5, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 8x + 7y + 11z - 16 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_5} = (2, 3, -1) \\ P_{r_5}(0, -1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 3x + y + 9z - 8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos). Dada la recta

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

encontrar los puntos de la recta que se encuentran a distancia 3 del punto $P(2, 0, 1)$

Solución:

Construimos la esfera de centro P y radio $r = 3$:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$$

Los puntos que buscamos serán los puntos de corte de esta esfera con la recta

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Luego:

$$(2\lambda - 2)^2 + (1 + \lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 = 9 \implies \lambda = \frac{1}{3}, \lambda = 0$$

Si $\lambda = 0 \implies P_1(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = \frac{1}{3} \implies P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.