Examen de Matemáticas II (Septiembre 2012)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?
2. (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
3. (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

1.

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \Longrightarrow A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le 3 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \neq f'(3^+) = 4 \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 3$$

2. $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$

3. $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+ & ay+ & 4z = & 6 \\ x+ & (a+1)y+ & z = & 3 \\ (a-1)x- & ay- & 3z = & -3 \end{cases}$$

se pide:

1. (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.
2. (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 4 & 6\\ 1 & (a+1) & 1 & 3\\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array}\right)\quad |A|=-3a^2-8a-5=0\Longrightarrow a=-1,\ a=-5/3$$

- Si $k\neq -1$ o $k\neq -5/3\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ n^o de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k=-5/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5/3 & 4 & 6\\ 1 & -2/3 & 1 & 3\\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array}\right)\Longrightarrow\left|\begin{array}{cc} 4 & 6\\ 1 & 3 \end{array}\right|=6\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -8/3 & -3 & -3 \end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right);\quad F_3=F_2-F_1$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2. Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x- & y+ & 4z= & 6\\ x+ & & z= & 3 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r\equiv\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3},\quad \pi\equiv 2x+y-2z-7=0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Solución:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=4+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+3\lambda \end{array}\right.\Longrightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,3)\\ P_r(4,1,2) \end{array}\right.$$

$$1 = d(P, \pi) = \frac{|2(4+2\lambda) + (1-\lambda) - 2(2+3\lambda) - 7|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$|3\lambda + 2| = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + 2 = 3 \Longrightarrow \lambda = 1/3 \Longrightarrow P_1(14/3, 2/3, 3) \\ -3\lambda - 2 = 3 \Longrightarrow \lambda = -5/3 \Longrightarrow P_1(2/3, 8/3, -3) \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + z = 4 \end{array} \right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s.
2. (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Solución:

1.
$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 2, -2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -2) \\ A(2, 3, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y + 2z - 11 = 0$$

2.
$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -1, 2) \\ P_t(4, -1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2012)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

1. (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.
2. (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.
3. (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z = 3$.

Solución:

1. $$\frac{P'+P}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = (4,-1,5)$$

2. Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P

   $$x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+1-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow x+y+z-2 = 0$$

   Calculamos el punto de corte P_1 de π con r:

   $$r: \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

   $$(1+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda-2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(1,1,0)$$

   Por último:

   $$\frac{P''+P}{2} = P_1 \Longrightarrow P'' = 2P_1 - P = (0,1,1)$$

3. Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a P:

   $$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P(2,1,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array}\right.$$

   Calculamos el punto de corte P_2 de π con r:

   $$(2+\lambda)+(1+\lambda)+(-1+\lambda)-3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

   Por último:

   $$\frac{P'''+P}{2} = P_2 \Longrightarrow P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

1. (1 punto). Determinar, justicando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
2. (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
3. (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recúerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

1. $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.
2. La integral se calcula por partes:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x\, dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \left. (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \right]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

3. $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \Longrightarrow m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1, \quad det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = 3, \quad det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

1. (0,5 puntos). $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})$.
2. (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d})$.
3. (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

Solución:

1. $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = 3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = -3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = 3$
2. $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) + det(-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = -3 - 2 = -5$
3. $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = -2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$

Problema 4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

1. (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.
2. (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array} \right); \ |A| = -a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

   - Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
   - Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right); |A| = 0, \ \left| \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{rrr} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{array} \right| = 0; \ |A_4| = \left| \begin{array}{rrr} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{array} \right| = 0$$

   Como
$$\left| \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

   Luego cuando $a = -4$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z= & 2 \\ -5x- & y+ & z= & -8 \\ 2x- & & 5z= & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=2 \\ y=-2 \\ z=0 \end{array}\right.$$