Examen de Matemáticas II (Modelo 2012)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 3)$, se pide:

- a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A , B y C . ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?
- b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por A , B y C .

Solución:

- a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A , B y C será la recta en la que se cortan los planos mediadores definidos entre A y B , entre A y C y entre B y C . Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano mediador entre A y B :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} \implies 2x+2y-6z+1 = 0$$

Plano mediador entre A y C :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \implies x-2y-z+2 = 0$$

$$r : \begin{cases} 2x + 2y - 6z + 1 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (7, 2, 3) \\ P_r \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + 7\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano π :

$$2(-1 + 7\lambda) + 2\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) + 2(3\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = 0$$

El único punto es el $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

- b) La ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C vendrá determinada por:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{AB} = (1, 1, -3) \\ \vec{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(1, -1, 2) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x+2y+3z-11 = 0$$

Problema 2 (3 puntos) Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + my - 5z = -4 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .
- (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -9m - 27 = 0 \Rightarrow m = -3$$

Si $m \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = -3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$$

$\text{Rango}(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + y - 5z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda(e^{\lambda x^2} + 2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2$$

Para que f sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Luego

$$\frac{\lambda}{3} = 2 \implies \lambda = 6$$

Problema 4 (2 puntos) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes: se pide:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \implies P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} P'(-1/3) = 0 \implies \frac{1}{3} - \frac{2a}{3} + b = 0 \\ P'(-1) = 0 \implies 3 - 2a + b = 0 \\ P'(0) = 1 \text{ pendiente de } y = x + 3 \implies b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

El punto $(0, P(0))$ también pertenece a la recta $y = x + 3$ luego para $x = 0 \implies y = 3 \implies P(0) = 3 \implies c = 3$ El polinomio buscado es

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2012)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \quad \text{y} \quad f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\int_2^5 f(x) dx$

b) (1 punto). $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$

c) (1,5 puntos). $\int_2^4 F(x)f(x) dx$.

Solución:

a) $\int_2^5 f(x) dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$

b) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 dx =$
 $= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$

c) $\int_2^4 F(x)f(x) dx = \left. \frac{(F(x))^2}{2} \right|_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$.

Problema 2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -a \\ -3x + 2ay = 7 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a .

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array} \right) \implies |\bar{A}| = 2a^2 + 12a - 32 = 0 \implies a = 2, a = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -8 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \implies$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -8 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Si $a = -8$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' : 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π' .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$$

En su forma continua:

$$r : \frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{6}$$

$$u_r = u_\pi \times u_{\pi'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, 6); \quad P_r(0, 0, -2)$$

b) Sea $P(x, y, z)$ un punto tal que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$:

$$\frac{|x - 2y + 2z + 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|2x + 2y - z - 2|}{\sqrt{9}} \implies |x - 2y + 2z + 4| = |2x + 2y - z - 2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 4 = 2x + 2y - z - 2 \implies x + 4y - 3z - 6 = 0 \\ x - 2y + 2z + 4 = -(2x + 2y - z - 2) \implies 3x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las rectas

$$r: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s .

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s .

Solución:

a)

$$r: \begin{cases} \vec{u}_r = (-6, 4, 4) \\ P_r(-3, 9, 8) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} \vec{u}_s = (3, -2, -2) \\ P_s(3, 9, 8) \end{cases}; \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \vec{u}_r = -2\vec{u}_s \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = |24(0, -1, 1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\vec{u}_r| = 2\sqrt{17}$$

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- a) Por hallar la recta formada por los puntos equidistantes a A , B , C : 1 punto, repartido en: Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. Por hallar los puntos que pertenecen al plano: 1 punto, repartido en: Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 2.- a) Por determinar el valor $m = -3$: 0,5 puntos. Por demostrar si que $m = -3$ el sistema es compatible determinado; 0,75 puntos. Por demostrar que si $m = -3$ el sistema es incompatible: 0,75 puntos b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 3.- Por el calculo de cada límite: 0,75 puntos. Por calcular el valor de A : 0,5 puntos.

Ejercicio 4.- Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- a) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. c) Planteamiento, 0,75 puntos. Resolución, 0,75 puntos.

Ejercicio 2.- a) Por determinar los valores $a = 2$, $a = -8$: 0,5 puntos. Por demostrar que si a es uno de estos valores el sistema es compatible determinado: 0,75 puntos. Por

demostrar que si a es distinto de estos dos valores el sistema es incompatible: 0,75 puntos. a) Planteamiento, 0,75 puntos. Resolución, 0,75 puntos.

Ejercicio 3.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.