Examen de Matemáticas II (Junio 2012-coincidentes)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

a) En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -2\cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

b)

$$f''(x) = -2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm 3\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4\sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm 3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm 3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$g(x) = \int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \sin x\cos x}{2} + C \Longrightarrow$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/4 + 1/2}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{\pi + 2}{8} \Longrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x + \sin x\cos x}{2} - \frac{\pi + 2}{8}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrc|c} 3 & 2 & (a-1) & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right); \quad |A| = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad a = -2$$

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 3 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

- Si $a = --2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y & & = 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,0,2)$ y la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array}\right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$(2+2\lambda-2)^2+(1-\lambda-1)^2+(3-(-1))^2 = (2+2\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(3-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{13}{2} \Longrightarrow \left(15, -\frac{11}{2}, 3\right)$$

b)

$$2x - y + \lambda = 0,\ \ 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$$

$$\pi : 2x - y - 2 = 0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vertices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vertices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2,2,4);\ \ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (2,-2,2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE} = (2,6,20) \Longrightarrow V = \left|\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 20 \end{array}\right| = 112\ u^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-4 \\ -2 & 2 & y-2 \\ 2 & 4 & z-8 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi \equiv 3x + y - 2z + 2 = 0$$

- Calculamos las ecuación de la recta $r \perp \pi$ que pasa por E:

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 + 3\lambda \\ y = 8 + \lambda \\ z = 28 - 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte E'' de r con π:

$$3(6+3\lambda)+(8+\lambda)-2(28-2\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow E''(12, 10, 24)$$

- $$\frac{E+E'}{2} = E'' \Longrightarrow E' = 2E''-E = (24, 20, 48)-(6, 8, 28) = (18, 12, 20)$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2012) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Solución:

a)

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \dfrac{a-\mu}{2} \\ z = -\mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3 - 2\lambda = \mu \\ \lambda = \dfrac{a-\mu}{2} \\ 1 = -\mu \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \\ a = -3 \end{cases} \Longrightarrow a = -3, \text{ y el punto de corte es } P(-1, -1, 1)$$

b)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,0) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1/2,-1) = 1/2(2,-1,-2) \\ P_s(0,-3/2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,-2) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & x+3 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y + 3 = 0$$

Problema 2 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = 1$,calcular los siguientes determinantes:

$a)$ $(1,5$ puntos$)$ $\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{array} \right|$, $b)$ $(1,5$ puntos$)$ $\left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right|$

Solución:

$$a) \quad \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{array} \right| = -6 \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = -6$$

$$b) \quad \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| =$$

$$2\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| + 2\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| = 3\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right| =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = 3\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = 3$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -1$$

Problema 4 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar

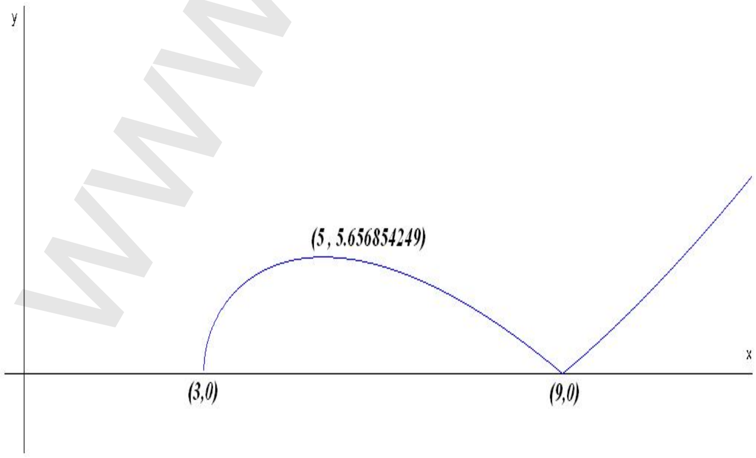
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:



a)

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx = [u = x^3] = \frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du = 1$$

b) $\text{Dom}(F(x)) = [3, +\infty)$

$$F'(x) = \frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}} = 0 \Longrightarrow x = 5,\ x = 9$$

	$(3,5)$	$(5,9)$	$(9,\infty)$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5, 4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9,0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3,0)$ hay un mínimo global.