Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

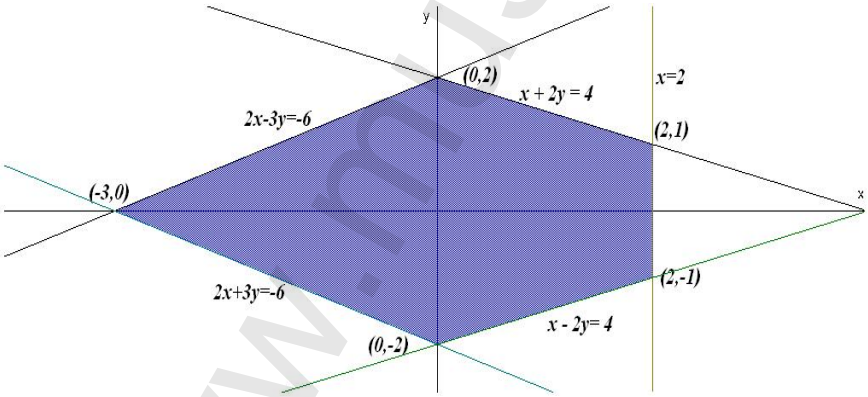
Problema 1 *(3 puntos).* Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

$$x + 2y \leq 4; \;\; x - 2y \leq 4; \;\; 2x - 3y \geq -6; \;\; 2x + 3y \geq -6; \;\; x \leq 2$$

1. Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
2. Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

1. La región S sería:



2. $f(x, y) = 2x + y$:

$$\begin{cases} f(-3,0) = -6 \\ f(0,2) = 2 \\ f(0,-2) = -2 \\ f(2,1) = 5 \\ f(2,-1) = 3 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $(-3, 0)$ vale -6. El valor máximo se encuentra en el punto $(2, 1)$ y vale 5.

Problema 2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

www.musat.net

1. Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

2. Represéntese gráficamente la función f.

3. Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$, la recta vertical $x = 1$.

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$:

   - Asíntotas verticales no hay ya que el denominador no se anula nunca. Horizontales:

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

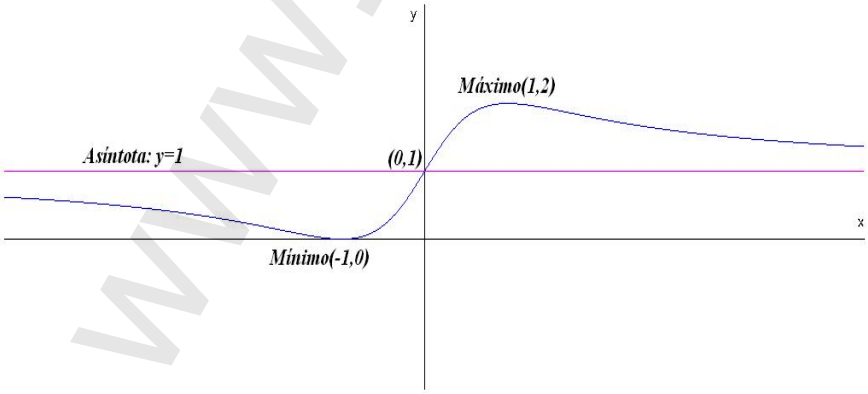
     Oblicuas no hay al haber horizontales.

   - $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

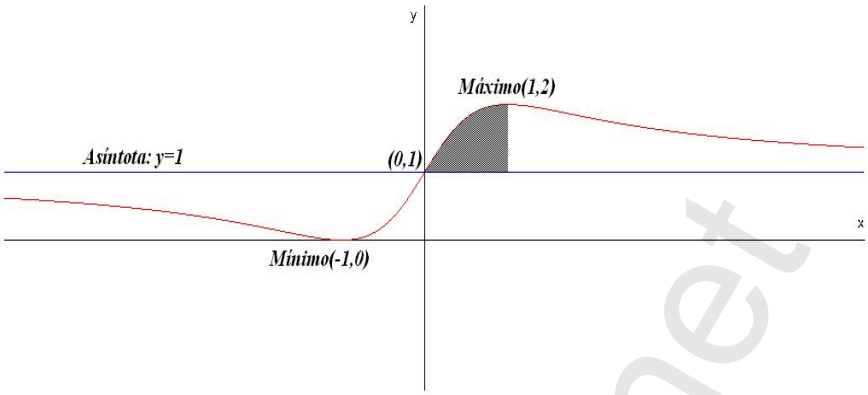
     La función presenta un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y un máximo en el punto $(1, 2)$.

2. La función tiene un punto de corte con los ejes, además del mínimo, en $(0, 1)$. Su representación gráfica es:



3. $$S = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\Big]_0^1 = \ln 2 \ \ u^2$$

www.musat.net



Problema 3 *(2 puntos).* Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

1. V_1: el primer hijo es niño, V_2: el segundo hijo es niño. M_1: el primer hijo es niña, M_2: el segundo hijo es niña.

$$P(V_1 \cap V_2 | V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51} = 0,51$$

2. Si el suceso A es al menos un niño y el B es dos niños tendremos que $A \cap B = B$ y

$$P(A) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,49^2 = 0,7599$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,51^2}{0,7599} = 0,342$$

Problema 4 *(2 puntos).* Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

1. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

www.musat.net

2. Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución:

$$N(98;15) \quad n=9 \Longrightarrow \overline{X} \equiv N(98;5)$$

1. $P(\overline{X} \geq 100) = P\left(\frac{\overline{X}-98}{5} \geq \frac{100-98}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

2. Sea $A = \{\overline{X} \leq 104\}$ y sea $B = \{\overline{X} \geq 100\}$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(100 \leq \overline{X} \leq 104)}{P(\overline{X} \geq 100)} = \frac{P(0,40 \leq Z \leq 1,2)}{P(Z \geq 0,40)} =$$

$$\frac{P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq 0,40)}{1 - P(Z \leq 0,40)} = \frac{0,8849 - 0,6554}{1 - 0,6554} = \frac{0,2295}{0,3446} = 0,6659$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}; \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

2. Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

3. Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

www.musat.net

2. $A^2 + cA + dI = O$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ c+1 & c+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -1 \\ d = 0 \end{array} \right.$$

3.

$$(A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos).* Se considera un rectángulo R de lados x, y.

1. Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

2. Si el área de R es igual a 36 m^2 , calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución:

1. El perímetro $2x + 2y = 12 \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Hay que optimizar la función $S = x \cdot y \Longrightarrow S(x) = x(6 - x) = -x^2 + 6x$:

$$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego la función presenta un máximo en $x = 3\,m$, luego $y = 3\,m$ lo que corresponde a un área de $9\,m^2$.

2. Ahora sabemos que $R = x \cdot y = 36 \Longrightarrow y = 36/x$ y queremos optimizar el perímetro $P = 2x + 2y \Longrightarrow P(x) = 2x + 72/x$:

$$P(x) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Longrightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Longrightarrow x \pm 6$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función presenta un mínimo en $x = 6\,m$ y, por tanto, $y = 6\,m$.

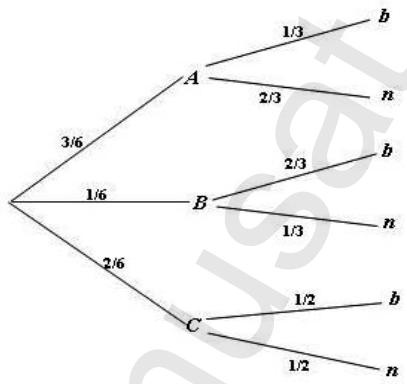
www.musat.net

Problema 3 *(2 puntos).* Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1,2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

2. Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:



1. $$P(b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

2. $$P(C|b) = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{0,444} = 0,375$$

Problema 4 *(2 puntos).* Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de tests y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

1. Para una muestra aleatoria simple de 9 tests, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.

2. ¿Cuál es el número mínimo de tests que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

www.musat.net

Solución:

1. $N(\theta, 10)$, $n = 9$, $\overline{X} = 110$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (103,467; 116,534)$$

2. $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 15,3664$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 16$

www.musat.net