Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \\ 2x+ay+(a^2-2)z=3 \end{array}\right.$$

1. Escríbase el sistema en forma matricial.

2. Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

3. Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.
$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right)$$

2.
$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{array}\right| = a^2-7a+6=0 \Longrightarrow a=1,\ \ a=6$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD. Sistema compatible determinado.
- Si $a=1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)\ F_3 = F_1 - 2F_2 \Longrightarrow \text{SCI}$$
  El sistema es compatible indeterminado.
- Si $a=6$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array}\right) \text{ y } \left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{SI}$$
  El sistema es incompatible.

3.

$$\left\{\begin{array}{c} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+4\lambda \\ y=-1-7\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=2(x-1)^2(x+3)$

1. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcúlense sus extremos relativos.
2. Calcúlense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.
3. Calcúlese el valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

1.

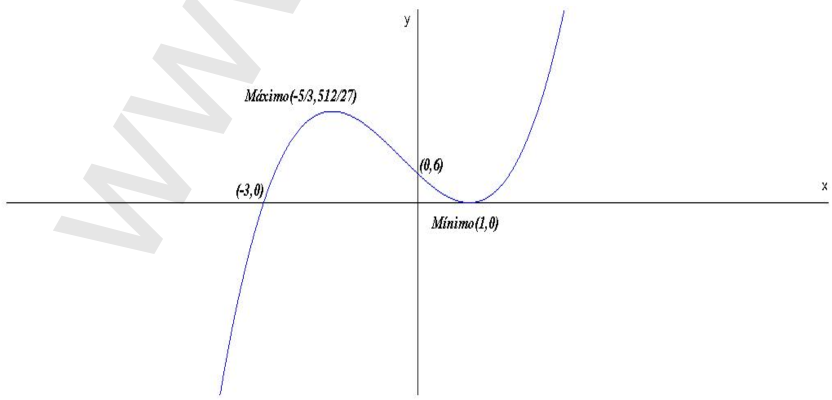
$$f'(x)=2(x-1)(3x+5)=0\Longrightarrow x=1,\ \ x=-5/3$$

	$(-\infty,-5/3)$	$(-5/3,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5/3)\cup(1,\infty)$ y es decreciente en $(-5/3,1)$.

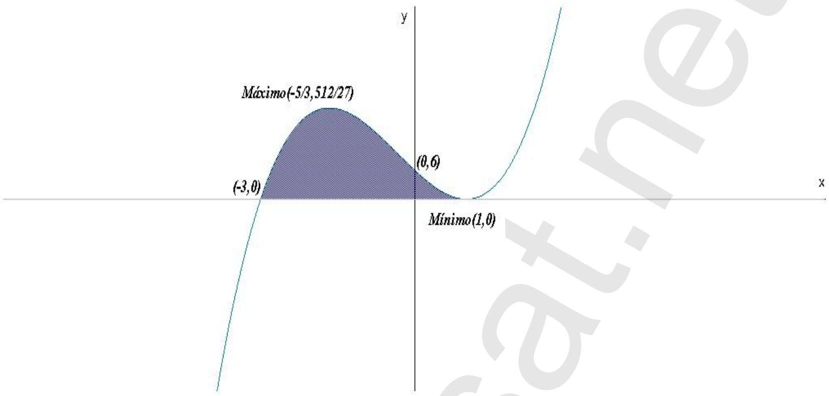
La función presenta un máximo en el punto $(-5/3,512/27)$ y un mínimo en $(1,0)$.

2. Para $x=0\Longrightarrow (0,6)$ y para $f(x)=0\Longrightarrow (1,0),\ \ (-3,0)$



3.
$$\int_{-3}^{1} 2(x-1)^2(x+3)\,dx = \int_{-3}^{1} (2x^3+2x^2-10x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-5x^2+6x\right]_{-3}^{1} = \frac{128}{3}\,u^2$$



Problema 3 *(2 puntos).* La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a $7/9$, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es $5/7$. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

1. Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

2. Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

$$P(A)=\frac{7}{9},\quad P(\overline{A})=\frac{2}{9},\quad P(B)=\frac{5}{7},\quad P(\overline{B})=\frac{2}{7}$$

1.
$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B) = \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{8}{21} = 0,381$$

2.
$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{7}{9}+\frac{5}{7}-\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0,937$$

Problema 4 *(2 puntos).* Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 *cm*. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7;\quad 4;\quad 4;\quad 5;\quad 7;\quad 6;\quad 2;\quad 8;\quad 6;\quad 1$$

1. Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

2. ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 *cm* con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 1,5), \quad n = 10 \;\; \overline{X} = 5$$

1. $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,22; 5,78)$$

2.
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 24,354 \Longrightarrow n = 25$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota**.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

2. Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

1.
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1}A^T=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.
$$\frac{1}{4}A^2-AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)$$
$$\frac{1}{4}A^2-B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 4 & -6\\ -2 & 1 & -2\\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6\\ 2 & 0 & 2\\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$
$$X=A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6\\ 2 & 0 & 2\\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por:
$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x\le 1/2\\ bx+c & \text{si} \quad x>1/2 \end{cases}$$
Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a>0$
- La función f es continua y derivable en $x=1/2$.
- El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x=-2$, $x=0$, es igual a $32/3$.

Solución:

- Por la continuidad en $x=1/2$:
$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} ax^2=\frac{a}{4}$$
$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} (bx+c)=\frac{b}{2}+c$$
$$\frac{a}{4}=\frac{b}{2}+c\Longrightarrow a-2b-4c=0$$

- Por la derivabilidad en $x = 1/2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x \le 1/2 \\ b & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'((1/2)^-) = a \\ f'((1/2)^+) = b \end{cases} \Longrightarrow a = b$$

- Por el área:

$$\int_{-2}^{0} ax^2\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \Longrightarrow a = 4$$

Luego $a = 4$, $b = 4$ y $c = -1$.

Problema 3 *(2 puntos).* Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
NoApto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

	Chico	Chica	Total
Apto	12109	9863	21972
NoApto	1717	1223	2940
Total	13826	11086	24912

$\Longrightarrow$

	Chico	Chica	Total
Apto	$0,486$	$0,396$	$0,882$
NoApto	$0,069$	$0,049$	$0,118$
Total	$0,555$	$0,445$	1

Sean los sucesos V: Chico, M: Chica, A: Apto y $\overline{A}$: No Apto.

1. $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,445 + 0,882 - 0,396 = 0,931$

2. $$P(\overline{A}|V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,069}{0,555} = 0,124$$

Problema 4 *(2 puntos).* Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 *cm* y desviación típica 4 *cm*.

1. Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(\overline{X} < 167)$.

2. Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(X > 172) = 0,0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

Solución:

1. $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 1)$:

$$P(\overline{X} < 170) = P\left(Z < \frac{167-170}{1}\right) =$$

$$P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

2. $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 4/\sqrt{n})$:

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172-170}{4/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{172-170}{4/\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - 0,0062 = 0,9938 \Longrightarrow \frac{172-170}{4/\sqrt{n}} = 2,5 \Longrightarrow \sqrt{n} = 5 \Longrightarrow n = 25$$