Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & a\\ & ay+ & z= & 1\\ ax+ & y+ & az= & a \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
2. Resúelvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
3. Resúelvase el sistema para $a = 3$

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & a\\ 0 & a & 1 & 1\\ a & 1 & a & a \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en estos casos el sitema es compatible determinado.

Si a=1:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz tiene dos filas iguales, claramente el sistema es compatible indeterminado.

Si a=0:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ y } \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0$$

El Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ por lo que el sistema es incompatible

2. Cuando $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 1\\ & y+ & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

3. Cuando $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x+ & y+ & z & = & 3 \\ & 3y+ & z & = & 1 \\ 3x+ & y+ & 3z & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8/9 \\ y = 1/3 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2}$

1. Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.
2. Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
3. Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

Solución:

1. $\mathrm{Dom}(f) = R - \{\pm\sqrt{2}\}$y el único punto de corte es $(0, 0)$.

   Asíntotas:

   - Verticales: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

     $$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^+}\right] = -\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^-}\right] = +\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^-}\right] = -\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: $y = 0$

     $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-2} = 0$$

   - Oblicuas: No hay por haber horizontales.

2. $f(1) = -3$ $f'(x) = -\dfrac{3(x^2+2)}{(x^2-2)^2} \Longrightarrow f'(1) = -9$

   $$y + 3 = -9(x-1) \Longrightarrow 9x + y - 6 = 0$$

3.
$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2|\Big]_2^3 = \frac{3}{2}\ln\frac{7}{2} = 1,879$$

Problema 3 *(2 puntos)* En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos con probabilidad 0,26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

1. por alguna de las dos instalaciones,

2. solamente por una de las dos.

Solución:

Sean los sucesos A: energía solar y B: energía eólica

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,26$$

1. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,54.$

2.
$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = 0,42$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

1. Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.

2. ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

1. $N(\mu, 15)$, $n = 400$, $\overline{X} = 180$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (178,53; 181,47)$$

2. $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 67,65$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 68$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2011) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.
2. Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.
3. Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \quad k = 3$$

   Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}.

   Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe A^{-1}.

2. Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

1. Calcúlese a, b para que f sea continua y derivable en $x = -1$
2. Para $a = 1$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.
3. Calcúlese el valor b para que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx = 6$.

Solución:

1. $$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

   Por la continuidad en $x = -1$:

   $$\lim_{x \longrightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1-} \frac{a}{x} = -a$$

   $$\lim_{x \longrightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1+} \frac{x^2-b}{4} = \frac{1-b}{4}$$

   $$-a = \frac{1-b}{4} \Longrightarrow 4a - b = -1$$

   Por la derivabilidad en $x = -1$:

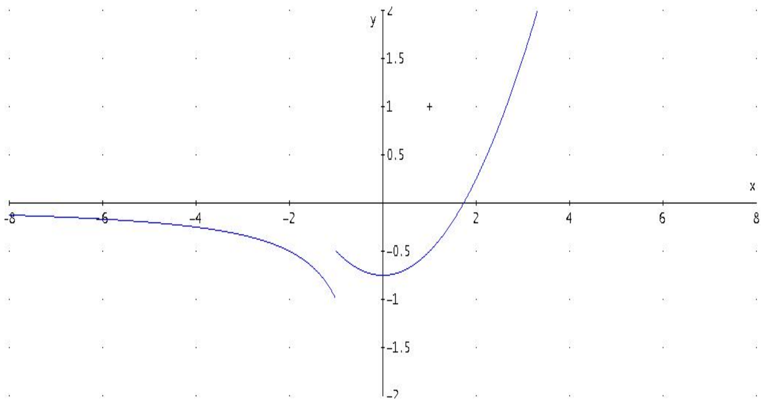
   $$f'(-1^-) = -a, \quad f'(-1^+) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

   Luego $b = 3$ y $a = 1/2$.

2. Para $a = 1$, $b = 3$:

   $$\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-3}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

3. $$\int_0^3 \frac{x^2-b}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - bx\right)\Big]_0^3 = \frac{1}{4}(9-3b) = 6 \Longrightarrow b = -5$$

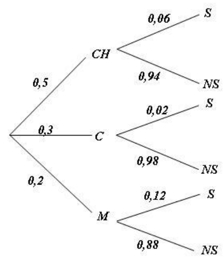


Problema 3 *(2 puntos)* En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0,5, de que sea un camión es 0,3 y de que sea una motocicleta es 0,2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0,06 para un coche, 0,02 para un camión y 0,12 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.

1. Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

2. Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida,¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

Solución:



1. $P(S) = 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,12 = 0,06$

2. $$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,12}{0,06} = 0,46$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

$$1,50; \quad 1,60; \quad 1,10; \quad 0,90; \quad 1,00; \quad 1,60; \quad 1,40; \quad 0,90; \quad 1,30; \quad 1,20$$

1. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
2. Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestral y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

Solución:

1. $N(\mu, 0{,}09)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1{,}25$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}194; 1{,}306)$$

2. $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 5{,}37$$

   Como n tiene que ser un número natural $n = 6$