Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2010

Problema 1 (5 puntos). En una pastelería se preparan dos tipos de roscones. Para cada unidad del tipo A se necesitan 5 huevos y 1,5 kilos de harina y para cada unidad del tipo B son necesarios 8 huevos y 4 kilos de harina. Hay que fabricar al menos 16 unidades del tipo A. Los del tipo A se venden a 10 euros y los del tipo B a 14 euros. Se dispone de 400 huevos y 160 kilos de harina y se quiere determinar el número de roscones de cada tipo que se han de producir para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuál es la producción que maximiza los ingresos?

c) Con la producción que maximiza los ingresos, ¿se gasta toda la harina?

Islas Canarias (junio 2009)

Solución:

x: nº de roscones de tipo A.

x: nº de roscones de tipo B.

a)

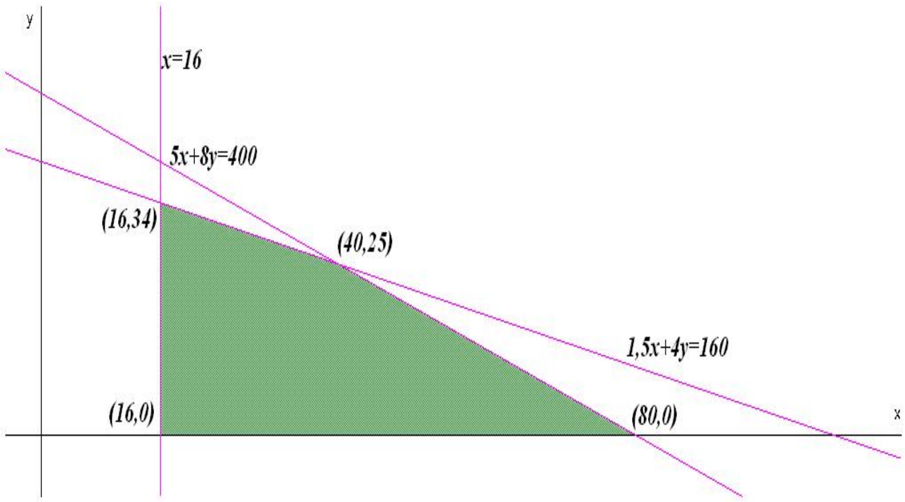
	huevos	harina	precio
A	5	$1,5$	10
B	8	4	14
1ª Disponible	400	160	

El problema sería encontrar el máximo de la función objetivo:

$$z(x,y) = 10x + 14y$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x + 8y \leq 400 \\ 1,5x + 4y \leq 160 \\ x \geq 16 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



Sustituyendo los puntos tendremos:

$$\begin{array}{l} z(16,0) = 160 \\ z(80,0) = 800 \\ z(40,25) = 750 \\ z(16,34) = 636 \end{array}$$

Los ingresos máximos serían de 800 euros cuando se venden 80 roscones del tipo A y ninguno del tipo B.

b) Se gastan $1,5 \cdot 80 = 120$ kg de harina y sobran 40 kg.

Problema 2 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & my+ & z = & m \\ - & 4y+ & mz = & -1 \\ 2x- & 2y+ & 3z = & m \end{array}\right.$$

a) Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & -4 & m & -1 \\ 2 & -2 & 3 & m \end{array}\right), \quad |A| = 2(m^2+m-2) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

tenemos Rango$(\overline{A}) = 3$ En este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A})$ y es un Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$ y además $F_3 = 2F_1 + F_2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Tenemos que:

Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Tiene infinitas soluciones)

b) Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ - & 4y+ & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/4 - (5/4)\lambda \\ y = 1/4 + (1/4)\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 0 \\ - & 4y & = & -1 \\ 2x- & 2y+ & 3z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 1/4 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$