Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2011

Problema 1 Calcular a y b sabiendo que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^2 + 5bx + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y calcular el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

- Por la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 5) = 3a - 2b + 5$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 + 5bx + 2) = a + 5b + 2$$

$$3a - 2b + 5 = a + 5b + 2 \Longrightarrow 2a - 7b + 3 = 0$$

  Luego $c = 1$.

- Por la derivabidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2ax + 5b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - 2b, \quad f'(1^+) = 2a + 5b \Longrightarrow 4a - 7b = 0$$

$$\begin{cases} 2a - 7b + 3 = 0 \\ 4a - 7b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 3/2 \\ b = 6/7 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^2 - \frac{12}{7}x + 5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{30}{7}x + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 9x - \frac{12}{7} & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x + \frac{30}{7} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como esta función es continua y derivable en el intervalo $[0, 2]$, el teorema del valor medio asegura la existencia de un punto $c \in [0, 2]$ que cumple:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{116/7 - 5}{2} = \frac{81}{14}$$

$$c < 1: \; f'(c) = 9c - \frac{12}{7} = \frac{81}{14} \Longrightarrow c = \frac{5}{6} < 1 \text{ vale}$$

$$c \ge 1: \; f'(c) = 3c + \frac{30}{7} = \frac{81}{14} \Longrightarrow c = \frac{1}{2} < 1 \text{ no vale}$$

Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.
9. Representación gráfica.
10. Calcular las rectas tangentes a f que sean paralelas a recta $x-3y+5 = 0$
11. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0$, esta ecuación no tiene solución y por tanto la función no corta el eje OX.
3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:

- Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = 1$$

$$y = x + 1$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(3, 6)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0$$

La función f no tiene puntos de inflexión.

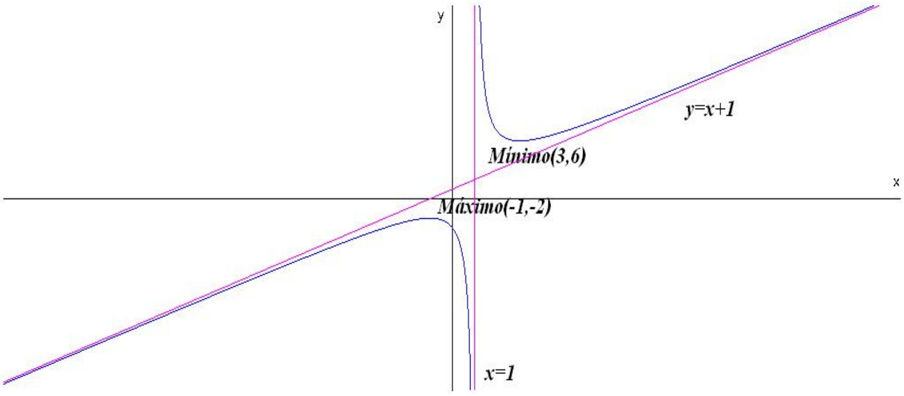
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

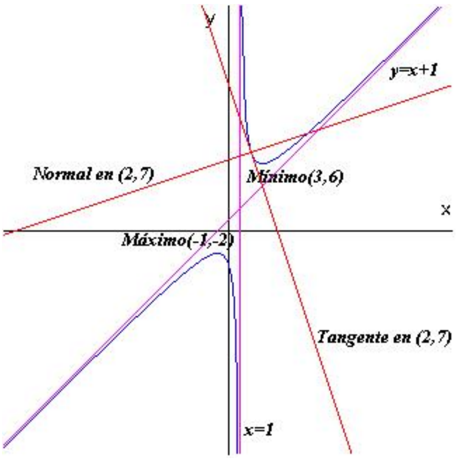
8. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 7$ y $m = f'(2) = -3$:

   Recta tangente: $y - 7 = -3(x - 2)$

   Recta normal: $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 2)$

9. Representación gráfica





10. $x - 3y + 5 = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$:

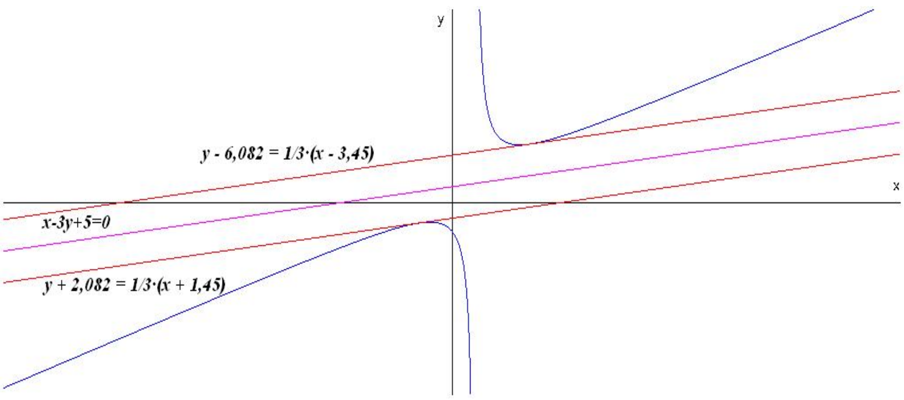
$$f'(a) = \frac{a^2 - 2a - 3}{(a-1)^2} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = 3,45, \;\; a = -1,45$$

   Si $a = 3,45 \Longrightarrow b = f(a) = 6,082$:

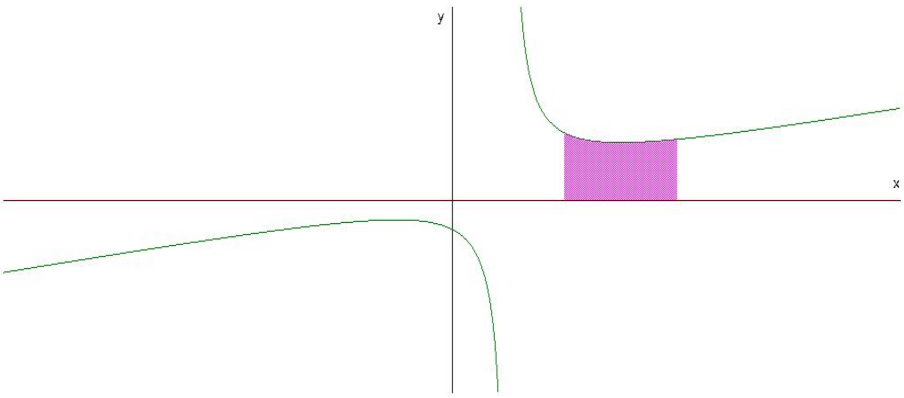
$$y - 6,082 = \frac{1}{3}(x - 3,45)$$

Si $a = -1,45 \Longrightarrow b = f(a) = -2{,}08$:

$$y + 2,082 = \frac{1}{3}(x + 1,45)$$



11. Calcular el siguiente área:



$$S = \int_2^4 \frac{x^2+3}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x + 1 + \frac{4}{x-1}\right)\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-1|\right]_2^4 = 8 + 4\ln 3 = 12,39\ u^2$$