Examen de Matemáticas II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).*

1. (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$$

2. (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

3. (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{x^2+9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Solución:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+0} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

2.
$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\ln|1+3x^2|\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

3. $x^2+9x+14\geq 0 \Longrightarrow Dom(f)=(-\infty,-7]\cup[-2,\infty)$.

$$f'(x)=\frac{2x-9}{2\sqrt{x^2+9x+14}}$$

   La función tiene derivada en $(-\infty,-7)\cup(-2,\infty)$.

Problema 2 *(3 puntos).* Dados los planos

$$\pi_1: 2x+3y+z-1=0;\quad \pi_2: 2x+y-3z-1=0,$$

y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{2};$$

se pide:

1. (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

2. (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

3. (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

Solución:

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

1. $d(P_r, \pi_1) = d(P_r, \pi_2)$:

$$\frac{|2(1+2\lambda) + 3(-1+\lambda) + (-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - 3(-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$|-4+9\lambda| = |6-\lambda| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4+9\lambda = 6-\lambda \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P_r'(3,0,0) \\ -4+9\lambda = -6+\lambda \Longrightarrow \lambda = -1/4 \Longrightarrow P_r''(1/2,-5/4,-5/2) \end{array} \right.$$

2. Corte de π_1 con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(1/2, 0, 0)$.

   Corte de π_1 con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, 1/3, 0)$.

   Corte de π_1 con el eje OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 1)$.

   Los vectores que forman estos puntos con el origen son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA} = (1/2, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/3, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \frac{1}{36}\ u^2$$

3. Obtenemos esta recta como intesección de dos planos, uno de ellos será π_2 y el otro será un plano π perpendicular a π_2 y que contiene a r:

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(1,-1,-2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ -3 & 2 & z+2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi: x-2y-3 = 0$$

$$\text{Proyección}: \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3, \ \forall\, a \in \Re$

Problema 4 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.
2. (1 punto). Hallar la matriz M^2.
3. (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Solución:

1. $$|M| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

2. $$M^2 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3.
$$M^n = \begin{cases} M & \text{si} \quad n \text{ impar} \\ I & \text{si} \quad n \text{ par} \end{cases} \Longrightarrow M^{25} = M$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2011) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).* Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

se pide:

1. (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.
2. (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

Solución:

1. Lo calculamos siguiendo los tres pasos siguientes:

   - Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P:
   $$2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + y - z = 0$$
   - Calculamos el punto de corte P' de π con r:
   $$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow$$
   $$2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - (-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)$$
   - El punto que buscamos P'' tiene que cumplir:
   $$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

2. Calculo un plano $\pi \perp r$ que contenga a P, calculado en el apartado anterior $\pi : 2x + y - z = 0$, y el punto de corte, P_1, de este plano con la recta s
$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1 = O(0, 0, 0)$$

La recta t que buscamos pasa por los puntos O y P:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=(0,1,1)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x+ & 4y & & = & 4k\\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = & 0\\ x+ & ky & & = & k^2 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.
2. (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k=1$.
3. (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k=2$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 4k\\ -k^3 & k^2 & k & 0\\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array}\right);\quad |A|=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 4 & 0\\ -k^3 & k^2 & k\\ 1 & k & 0 \end{array}\right|=2k(2-k)=0\Longrightarrow k=0,\ \ k=2$$

- Si $k\neq 0$ y $k\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD Sistema compatible determinado.
- Si $k=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 4\\ 1 & 0 \end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow$$

  Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ SCI Sistema compatible indeterminado.
- Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 8\\ -8 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right);\quad 2F_3=F_1 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 2 & 4\\ -8 & 4 \end{array}\right|=40\neq 0\Longrightarrow$$

  Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ SCI Sistema compatible indeterminado.

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x+ & 4y & & = & 4\\ -x+ & y+ & z & = & 0\\ x+ & y & & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1\\ z=-1 \end{array}\right.$$

3.
$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x+ & 4y & & = & 8\\ -8x+ & 4y+ & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4/5+1/5\lambda\\ y=8/5-1/10\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos).* Dada la funcion

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} e^{1/x} & \text{si} & x<0\\ k & \text{si} & x=0\\ \dfrac{\cos x-1}{\sin x} & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x=0$. Justificar la respuesta.
Solución: f es continua en $x=0$ si

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} e^{-1/x}=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x}=0$$

Como $f(0)=k\Longrightarrow k=0$

Problema 4 *(2 puntos).*

1. (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)=-\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.

2. (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x)=-\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.

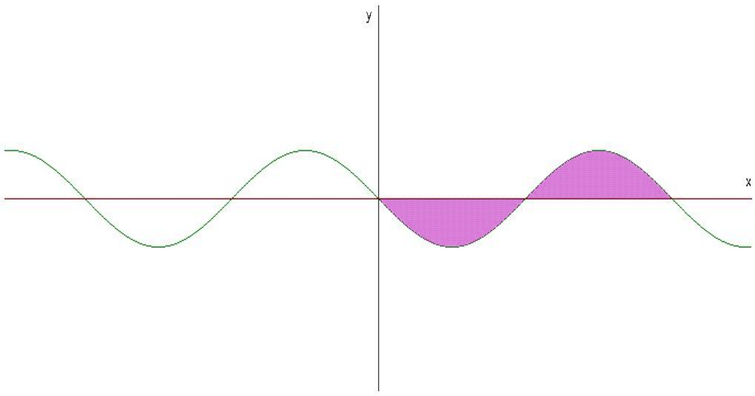
Solución:

1. $f(x)=-\sin x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=\pi$. En el intervalo $[0,2\pi]$ hay dos recitos de integración $S_1\equiv[0,\pi]$ y $S_2\equiv[\pi,2\pi]$

$$S_1=\int_0^{\pi}(-\sin x)\,dx=\left.\cos x\right]_0^{\pi}=-2$$

$$S_2=\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,dx=\left.\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=2$$

$$S=|S_1|+|S_2|=4\ u^2$$



2.

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big]_0^{\pi} = \pi^2 \ u^3$$