Examen de Matemáticas II (Modelo 2011)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & + & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a)
- Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función presenta un Máximo en el punto $\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$. En el punto $x = -1$ la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

- Asíntotas:
  - Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

  - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

  - Oblicuas: No hay al haber horizontales

- Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abcisas que esté dentro del intervalo $[0,3]$:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2}=0 \Longrightarrow x=1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

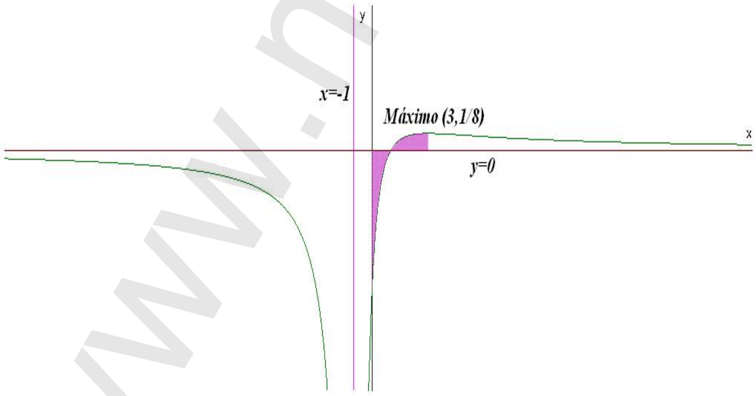
$$x-1=A(x+1)+B \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \Longrightarrow B=-2 \\ x=0 \Longrightarrow -1=A+B \Longrightarrow A=1 \end{array}\right.$$

$$F(x)=\int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx=\int \frac{1}{x+1}\,dx-2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}$$

$$S_1=\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx=F(1)-F(0)=\ln 2-1$$

$$S_2=\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx=F(3)-F(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=1-\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r\equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}, \quad s\equiv \frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(5,4,0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1)$$

a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las rectas r y s son paralelas.

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & x+1 \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & 0 + & 2\lambda \\ y = & -\dfrac{3}{5} - & 2\lambda \\ z = & -\dfrac{1}{5} - & \lambda \end{cases}$$

Un punto de r puede ser: $\left(0, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ y

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(2, -2, -1)$$

b) $\gamma : 2x + y + 2z + \lambda = 0$ y contiene al punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$, luego:

$$2\sqrt{2} + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -(1 + 2\sqrt{2}) \Longrightarrow$$

$$\gamma : 2x + y + 2z - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2011) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Solución:

a)

$$A^2-4A+3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2-4A+3I = O \Longrightarrow A(A-4I) = -3I \Longrightarrow A\left(-\frac{1}{3}(A-4I)\right) = I \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

c)

$$(A-2I)^2 = (A-2I)(A-2I) = A^2-2IA-2AI+4I^2 = A^2-4A+4I =$$

$$A^2 - 4A + 3I + I = O + I = I \Longrightarrow (A-2I)^{-1} = A - 2I$$

.

Problema 2 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-3,0)$, $B(3,1,-2)$,$C(7,2,3)$, $D(5,-2,5)$ y $E(1,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2),\ \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3),\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

b)

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{BC} = (4, 1, 5) = \sqrt{42} \\ \overrightarrow{CD} = (-2, -4, 2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) = \sqrt{42} \end{array}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |2(11, -9, -7)| = 2\sqrt{251}\, u^2$$

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) \\ A(1, -3, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 1 & y+3 \\ -2 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

$$d(E, \pi) = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}}\, u$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{(-1/x^2)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1-\tan x}}\right) = 1$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abcisas que esté dentro del intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a $\pi/6$ y de $\pi/6$ a $\pi/2$. Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6}\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$