

Examen de Matemáticas II (Junio 2011)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a .

2. (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b , y resolverlo cuando sea posible.

3. (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

1. $|A| = 4 - a^2 = 0 \implies a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$

2. Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 6 \neq 0$$

Luego el $\text{Rango}(A) = 2$ independientemente del valor de b . Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\left| \begin{array}{ccc} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{array} \right| = 6(b-3) = 0 \implies b = 3$$

Si $b \neq 3 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el $\text{Rango}(\bar{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos)

1. (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

2. (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

1. Llamamos A al punto intersección de π con r_1 :

$$2x + 3x + 7x = 24 \implies x = 2 \implies A(2, 2, 2)$$

Llamamos B al punto intersección de π con r_2 :

$$2x = 24 \implies x = 12 \implies B(12, 0, 0)$$

Llamamos C al punto intersección de π con r_3 :

$$3y = 24 \implies y = 8 \implies B(0, 8, 0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) \quad \overrightarrow{OB} = (12, 0, 0) \quad \overrightarrow{OC} = (0, 8, 0)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 32 u^3$$

2. Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_{r_4} \times \vec{u}_{r_5} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, -3, -1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_4} = (1, 2, -2) \\ P_{r_4}(-1, 5, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 8x + 7y + 11z - 16 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_5} = (2, 3, -1) \\ P_{r_4}(0, -1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 3x + y + 9z - 8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Se pide:

1. (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$.

2. (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

1.

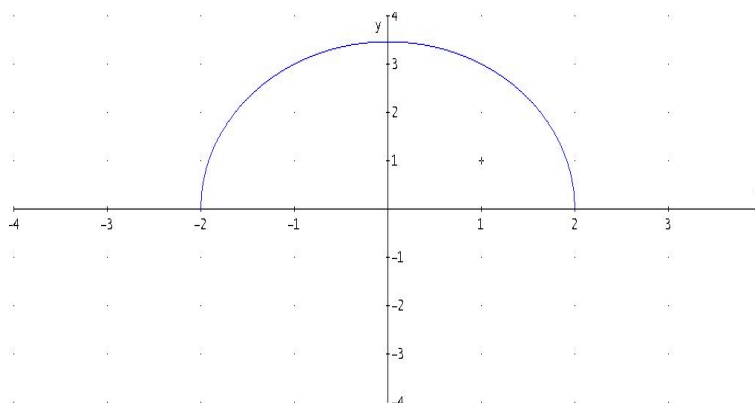
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx = \left. \frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15} \right|_1^3 = \frac{316}{15}$$

2. El dominio de la función viene dado por la inecuación $12-3x^2 \geq 0 \implies \text{Dom}(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abscisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \implies x = 0$$

	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \implies (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 4 (2 puntos) Se pide:

1. (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

2. (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

2. Sea cual sea el valor de m , la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + 3x + m) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x + m) = -\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abscisas.

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \geq 0 \quad \forall x \in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

Examen de Matemáticas II (Modelo 2011) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

1. (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
2. (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
3. (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{ax^4 - 3}{x^4} = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0 \implies a = 3$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \implies f''(1) = 12 > 0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \implies 3x^4 = 3 \implies x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \implies f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

2. Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0} \right] = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

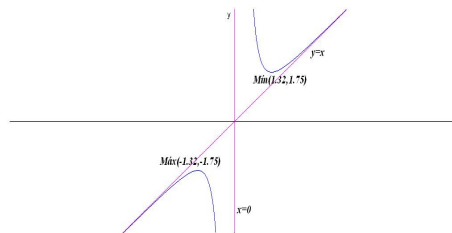
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = 0$$

$$y = x$$

3. La gráfica para $a = 1$:



Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \implies x = -1, 32, x = 1, 32$$

	$(-\infty; -1, 32)$	$(-1, 32; 1, 32)$	$(1, 32; \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 32; -1, 75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, 32; 1, 75)$

Problema 2 (3 puntos)

1. (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m .

2. (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

- 1.

$$\begin{cases} y + (m-1)z = m \\ (m-1)y + z = m \\ (m-2)x + + = m+2 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array} \right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \implies m = 0, m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

2. Si $m = 0$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Si $m = 1$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

1. (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.
2. (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Solución:

- 1.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \implies \text{se cortan}$$

- 2.

$$t : \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right)$ y el vector director $\vec{u}_t = (0, 2, 1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\vec{u}_t = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2}$, y el punto P_t , dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

Problema 4 (2 puntos) Se pide:

- (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$.
- (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

Solución:

1.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{AB} = (-1, 2, 0) \\ \vec{AC} = (-1, 0, 1) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x+y+2z-2=0$$

$$2. \quad -2x + y + z + \lambda = 0 \implies -2 + 2 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3:$$

$$\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$$

$$3. \quad \vec{AP} = (0, 2, 3):$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-8| = \frac{4}{3} u^3$$