Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Simulacro 2010) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & kz = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.
2. Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5k - 5 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

   Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

   Si $k = 1$

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

   Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Compatible Indeterminado.

2. Si $k = 1$

   $$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

3. Si $k = 0$

   $$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

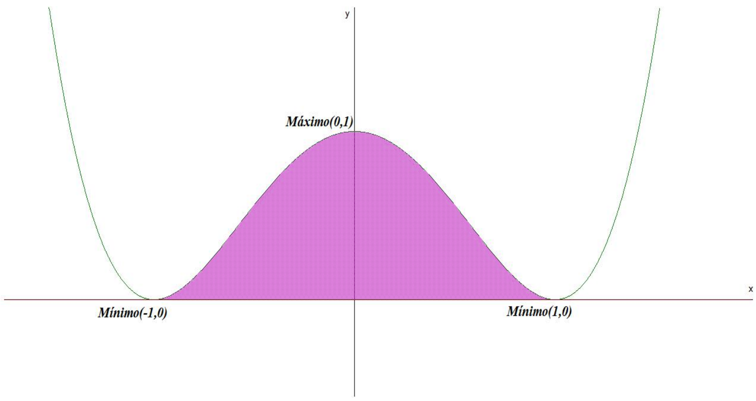
$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

1. Determínense los extremos relativos de f.
2. Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.
3. Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de f y el eje OX.

Solución:

1. $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y dos mínimos en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

2. $a = 3 \Longrightarrow f(3) = 64$, $m = f'(3) = 96$. La ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Longrightarrow 96x - y - 224 = 0$$

-

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15} \; u^2$$

- $$S = |S_1| = \frac{16}{15}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\ \ P(B) = \frac{1}{3};\ \ P(C) = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3};\ \ P(A \cap B \cap C) = 0;\ \ P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

1. Calcúlese $P(C \cap B)$.
2. Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

1.

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap A) = P(C|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + 0 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$$

2. $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$

Problema 4 *(2 puntos)* Una empresa de muebles fabrica dos modelos de armarios. Cada armario del primer modelo requiere 5 horas para su montaje 1 hora de pulido y 1 hora para su embalaje y deja un beneficio de 300 euros. Cada armario del segundo modelo necesita 2 horas de montaje, 1 hora de pulido y 2 horas de embalaje y su beneficio es de 400 euros. La empresa dispone de 40 horas para montaje, 10 horas para pulido y 16 horas para el embalaje. ¿Cuál es la producción que maximiza el beneficio?

1. Plantear el problema.
2. Resolución gráfica.
3. Calcular la producción máxima y el beneficio.

Solución:

1. Sea x nº de armarios del primer modelo.

   Sea y nº de armarios del segundo modelo.

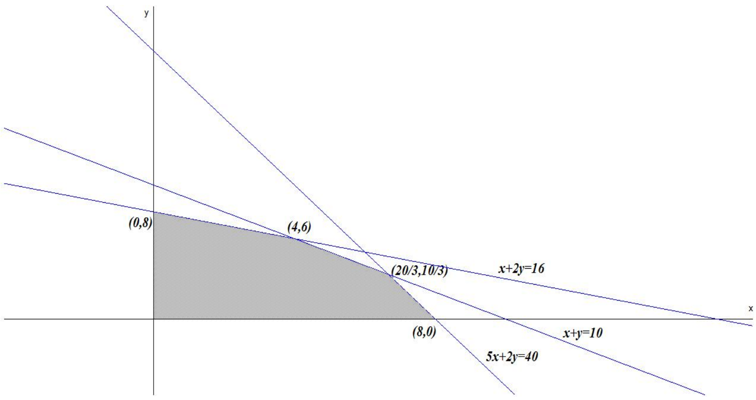
	Montaje	Pulido	Embalaje	Beneficio
Modelo1	5	1	1	300
Modelo2	2	1	2	400
Total	40	10	16	

   La función objetivo: $z(x,y) = 300x + 400y$

   Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 40 \\ x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

2. La gráfica será:



3.

$$\begin{array}{lcr} z(0,8) & = & 3200 \\ z(8,0) & = & 2400 \\ z(4,6) & = & 3600 \\ z(20/3,10/3) & = & 3333,3 \end{array}$$

   Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 4 armarios del primer modelo y 6 del segundo con un beneficio de 3600 euros.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Simulacro 2010) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A yB, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

Sea x cantidad de petróleo tipo A.

Sea y cantidad de petróleo tipo B.

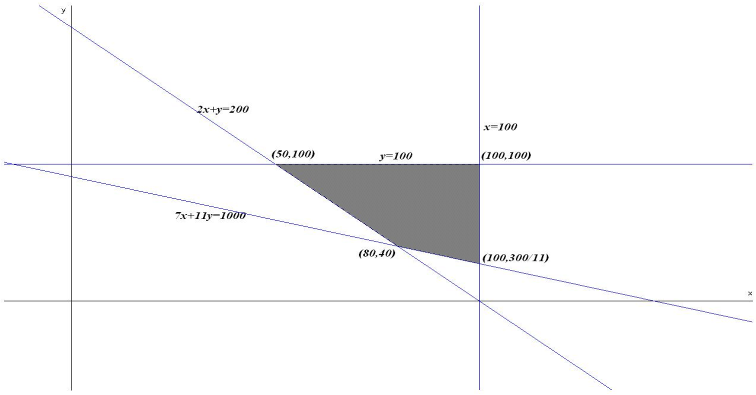
	Gasolina	Fuel − oil	Coste
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10	50	

La función objetivo: $z(x,y) = 350x + 400y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcr} z(80,40) & = & 44000 \\ z(50,100) & = & 57500 \\ z(100,300/11) & = & 45909,09 \\ z(100,100) & = & 75000 \end{array}$$



Luego para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$, obtener:

1. El dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.
2. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.
3. Las asíntotas.
4. Con la información obtenida en los anteriores apartados, representar gráficamente la función.

Solución:

1. El $Dom(f) = R - \{\pm 2\}$
   - Con el eje OX: $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow (0,0)$
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (0,0)$
2. $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 2) \cup (2, \infty)$

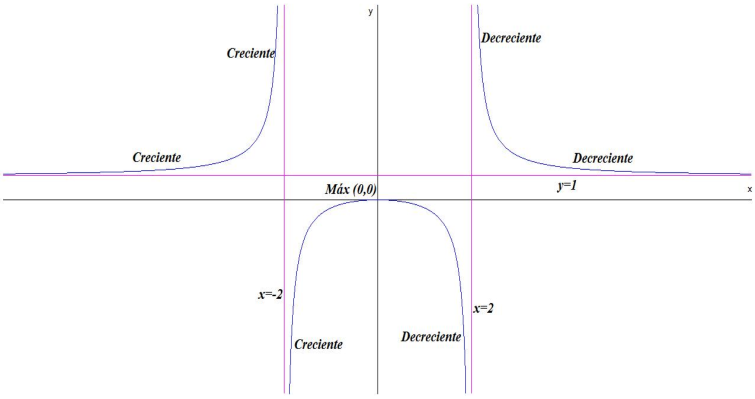
La función tiene un máximo en $(0,0)$.

3. Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

   - Si $x = -2$:
$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
   - Si $x = 2$:
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

   Para calcular las asíntotas horizontales:
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

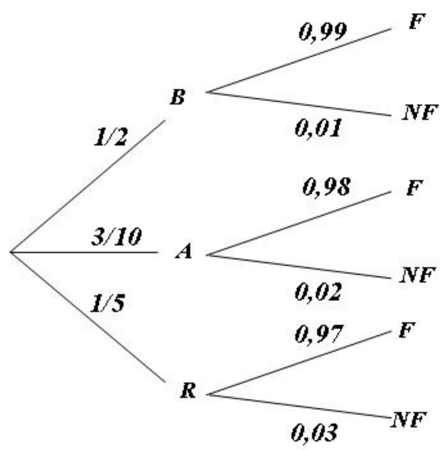
4. La representación gráfica es:



Problema 3 *(2 puntos)* Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul y 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

1. Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

2. Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea de color azul



Solución:

$$P(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},\ \ P(B) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10},\ \ P(B) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

- $$P(NF) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

- $$P(A|NF) = \frac{P(NF|A) \cdot P(A)}{P(NF)} = \frac{0,02 \cdot 3/10}{0,017} = 0,35294$$

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver:

1. Despeja la matriz X en la ecuación: $2X + AX = I$

2. Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $2X + AX = I \Longrightarrow X = (2I + A)^{-1}$

2. Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que:

$$2I + A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2I + A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$