Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2009

Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 4y+ & z= & 2 \\ 3x- & y+ & 2z= & 1 \\ 2x- & 5y+ & az= & -a \end{array}\right.$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro a.
2. Resolver el sistema para $a = 1$ y $a = 0$.

Justificar respuesta. (La Rioja (Junio 2008)).

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -a \end{array}\right), \quad |A| = -13a + 13 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 4y+ & z= & 2 \\ 3x- & y+ & 2z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6/13 - 9/13\lambda \\ y = 5/13 - 1/13\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

2. Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 4y+ & z= & 2 \\ 3x- & y+ & 2z= & 1 \\ 2x- & 5y+ & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 15/13 \\ y = 6/13 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 2 (3 puntos).

1. (1 punto). Despeja la matriz X en la ecuación $2X - B = AX$.
2. (2 puntos). Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Castilla La Mancha (Junio 2008))

Solución:

$$2X - B = AX \Longrightarrow X = (2I - A)^{-1}B$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & -1/4 \\ -2/4 & -2/4 & -2/4 \\ -5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$(2I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & -1/4 \\ -2/4 & -2/4 & -2/4 \\ -5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar las matrices X que cumplan que

$$AX = XA$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b - d = -a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = -c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$