

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Marzo 2010

Problema 1 (2 puntos). Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

1. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a r .
2. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular r .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \quad O(0, 0, 0) \implies \overrightarrow{OP_r} = (1, -1, 2) \implies$$
$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{OP_r} = (1, -1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : 7x - 3y - 5z = 0$$

2. $\pi' : 2x + 3y + z + \lambda = 0$ y como pasa por el origen $0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$, luego el plano buscado es $\pi' : 2x + 3y + z = 0$

Andalucía (Junio 2008)

Problema 2 (2 puntos). Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1 + \lambda, 2, 1 - \lambda)$ y $C(1 + \lambda, 1 + \lambda, 2 + \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90° , independientemente del valor de λ .
2. Determina los valores de λ , para los que la longitud de la hipotenusa del triángulo A , B y C sea igual a 3.

Solución:

1. Tenemos $\overrightarrow{AB} = (\lambda, 1, -\lambda)$ y $\overrightarrow{AC} = (\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \implies \alpha = 90^\circ$$

2. La hipotenusa vale $|\overrightarrow{BC}| = |(0, \lambda - 1, 1 + 2\lambda)| = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = 3 \implies \lambda = -7/5$ y $\lambda = 1$.

Castilla La Mancha (Junio 2008)

Problema 3 (3 puntos). Dadas las rectas

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

y el punto $P(1, 1, -1)$, encontrar la recta que pasando por P corte a r y a s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 3) \\ P_s(1, -7, -5) \end{cases} \quad P(1, 1, -1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{P_r P} = (-1, 2, -1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 2 & 2 & y+1 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : y+2z+1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{P_s P} = (0, 8, 4) \\ P_s(1, -7, -5) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 8 & y+7 \\ 3 & 4 & z+5 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 4x+y-2z-7=0$$

La recta t que buscamos es la definida como corte de dos planos:

$$t : \begin{cases} y+2z+1=0 \\ 4x+y-2z-7=0 \end{cases}$$

Cataluña (Junio 2008)

Problema 4 (3 puntos). Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

Se pide:

1. Obtener, razonadamente, la ecuaciones paramétricas de r y s .
2. Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas r y s .
3. Calcular la distancia entre las rectas r y s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_s(0, 1, 3) \end{cases} \implies$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ y = -\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$$

2. Calculamos $\overrightarrow{P_s P_r} = (1, -1, -3)$ y tenemos: $\text{Rango}(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_s P_r}) = 2$ y $\text{Rango}(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}) = 1 \implies$ luego las rectas son paralelas.

3.

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s P_r}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \right| = |(4, -5, 3)| = \sqrt{50}$$

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s P_r}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Comunidad Valenciana (Junio 2008)