

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-General)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m
2. (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

1.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

Si $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

2. (1 punto). Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} -x+ & y+ & & t = 0 \\ x- & y+ & & t = 0 \\ x+ & y+ & 2z- & t = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \\ t = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- (1 punto). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 .

Solución:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases}$$
$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases}$$

1.

$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Se obtiene la recta t perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, -1, 1) \\ \vec{u}_{r_1} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies y + z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, -1, 1) \\ \vec{u}_{r_2} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

2.

$$d(\vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}) = \frac{[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}]}{|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, 1, 3), \quad |\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}$$

$$[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Problema 3 (2 puntos) Calcular los límites:

1. (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$

2. (1 punto). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x} = \lambda \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \ln \lambda$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+x^2}}{1 + \arctan x} = a = \ln \lambda \implies \lambda = e^a$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2e^x}{7 + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular:

1. (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

2. (1 punto). $\int_0^\pi x \cos x \, dx$

Solución:

1.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(4-x^2)^{-1/2} \, dx = -\sqrt{4-x^2} \Big|_0^1 = 2-\sqrt{3}$$

2. $\int_0^\pi x \cos x \, dx$ se resuelve por partes $u = x$ y $dv = \cos x \, dx \implies du = dx$
y $v = \sin x$:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-General) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

1. (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
2. (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .
3. (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

Solución:

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y-2 \\ 6 & b & z-4 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

1. π_1 y π_2 son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \implies b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

2.

$$t : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

3. $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x, y, z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \implies$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \implies \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \implies \text{no tiene solución} \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución:

$\overrightarrow{AP} = (1 - a, 2, 1)$ y $\overrightarrow{AQ} = (2 - a, 1, 1)$ y como punto elijo el $A(a, 0, 0)$:

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 - a & 2 - a & x - a \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y + (a - 3)z - a = 0$$

Punto de corte de π con OY : hacemos $x = 0$ e $z = 0 \implies B(0, a, 0)$.

Punto de corte de π con OZ : hacemos $x = 0$ e $y = 0 \implies C(0, 0, a/(a - 3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0), \overrightarrow{OB} = (0, a, 0), \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a - 3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a - 3) \end{vmatrix} \right| = \frac{a^3}{6a - 18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a - 9)}{6(a - 3)^2} = 0 \implies a = 0, \quad a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

	$(-\infty, 9/2)$	$(9/2, \infty)$	\implies Mínimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{8}\right)$
$V'(a)$	-	+	
$V(a)$	decrece	crece	

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \quad B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \quad C(0, 0, 3)$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \implies$$

$\text{Rango}\bar{A} = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

- Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \implies \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies$$

$\text{Rango}\bar{A} = \text{Rango}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

3. Se elige una ecuación de forma que los términos en x , y y z dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \implies \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \implies$$

$\text{Rango} \bar{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

Problema 4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \implies a = 0, a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \implies \text{Rango}(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

2. Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \implies$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \implies$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$