# Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-General)
## Selectividad-Opción A
**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de $A$ según los valores del parámetro $m$

b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Solución**

a)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Longrightarrow m = -1, \ m = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Longrightarrow m = -1, \ m = 2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = -1, \ m = 2$$

Si $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m=2$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A)=1$$

Si $m\neq -1$ y $m\neq 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.

b) (1 punto). Si $m=0$:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} -x+ & y+ & & t= & 0\\ x- & y+ & & t= & 0\\ x+ & y+ & 2z- & t= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & -\lambda\\ y= & -\lambda\\ z= & \lambda\\ t= & 0 \end{array}\right.$$

**Problema 2** *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r_1\equiv\left\{\begin{array}{l} y=1\\ z=3 \end{array}\right. \qquad r_2\equiv\left\{\begin{array}{c} x=0\\ y-z=0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta $t$ que corta a $r_1$ y $r_2$ y es perpendicular a ambas.

b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas $r_1$ y $r_2$.

**Solución:**

$$r_1\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=1\\ z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,0,0)\\ P_{r_1}(0,1,3) \end{array}\right.$$

$$r_2\equiv\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}}=(0,1,1)\\ P_{r_2}(0,0,0) \end{array}\right.$$

a)

$$\overrightarrow{u_t}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-1,1)$$

Se obtiene la recta $t$ perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,0,0) \\ P_{r_1}(0,1,3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+z-4=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (0,1,1) \\ P_{r_2}(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x=0$$

$$t \equiv \begin{cases} y+z-4=0 \\ x=0 \end{cases}$$

b)

$$d(\overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}) = \frac{\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right]}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0,1,3), \quad |\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}| = |(0,-1,1)| = \sqrt{2}$$

$$\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

**Problema 3** *(2 puntos)* Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+\arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$.

**Solución:**

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+\arctan x)^{a/x} = \lambda \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{a\ln(1+\arctan x)}{x} = \ln\lambda$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a\ln(1+\arctan x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{a}{1+x^2}}{1+\arctan x} = a = \ln\lambda \Longrightarrow \lambda = e^a$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3+2e^x}{7+5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

**Problema 4** *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) (1 punto). $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

**Solución:**

a)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)(4-x^2)^{-1/2}\,dx = -\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 2-\sqrt{3}$$

b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ se resuelve por partes $u = x$ y $dv = \cos x\,dx \Longrightarrow du = dx$ y $v = \sin x$:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi} = -2$$

## Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-General) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano $\pi_2$ determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $v_1 = (0,2,6)$ y $v_2 = (1,0,b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de $a$ y $b$ para que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$.

c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de $\pi_1$ y $\pi_2$.

**Solución:**

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y-2 \\ 6 & b & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

a) $\pi_1$ y $\pi_2$ son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \Longrightarrow b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

b)

$$t : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

c) $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x, y, z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{| - 2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \Longrightarrow \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \Longrightarrow \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

**Problema 2** *(3 puntos)* Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano $\pi$ que corta a loa semiejes positivos de $OY$ y $OZ$ en los puntos $B$ y $C$ respectivamente. Calcular el valor de $a$ para que el tetraedro determinado por los puntos $A$, $B$, $C$ y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

**Solución:**

$\overrightarrow{AP} = (1 - a, 2, 1)$ y $\overrightarrow{AQ} = (2 - a, 1, 1)$ y como punto elijo el $A(a, 0, 0)$:

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 - a & 2 - a & x - a \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + (a - 3)z - a = 0$$

Punto de corte de $\pi$ con $OY$: hacemos $x = 0$ e $z = 0 \Longrightarrow B(0, a, 0)$.

Punto de corte de $\pi$ con $OZ$: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, a/(a - 3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0),\ \ \overrightarrow{OB} = (0, a, 0),\ \ \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a - 3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a - 3) \end{vmatrix} | = \frac{a^3}{6a - 18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a - 9)}{6(a - 3)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

| | $(-\infty, 9/2)$ | $(9/2, \infty)$ |
|---|---|---|
| $V'(a)$ | $-$ | $+$ |
| $V(a)$ | decrece | crece |

$\Longrightarrow$ Mínimo $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{81}{8}\right)$

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \quad B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \quad C\,(0, 0, 3)$$

**Problema 3** *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

**Solución:**

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

b) Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

c) Se elige una ecuación de forma que los términos en $x$, $y$ y $z$ dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A} = 3 \neq$Rango$(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

**Problema 4** *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de $A$ según los valores del parámetro $a$.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de $a$ existe la matriz inversa $A^{-1}$? Calcular $A^{-1}$ para $a = 1$.

**Solución:**

a)

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$