

Examen de Matemáticas II (Junio 2010-General)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- (0,75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,75 puntos). Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

1. $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

2. $f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

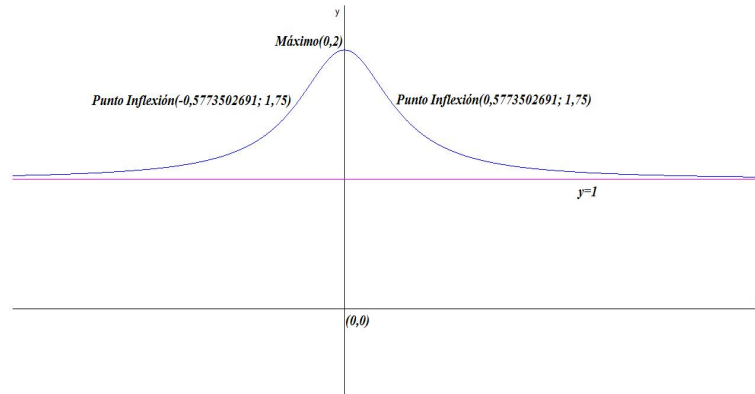
La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$

3. Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 \implies y = 1$$

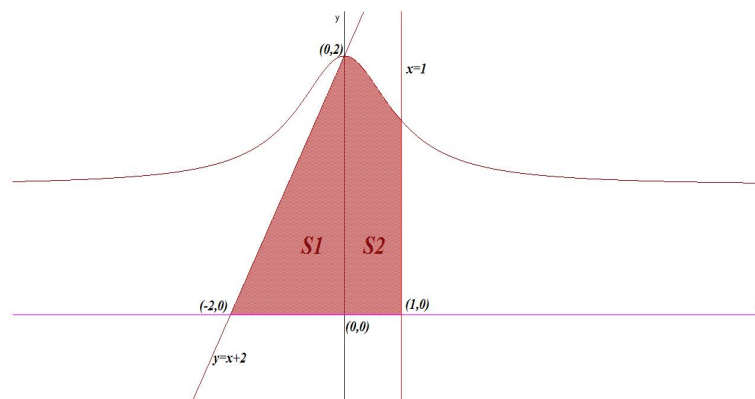
y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



4. $S1 = \frac{4}{2} = 2$ y $S2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \arctan x + x \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4 + \pi}{4}$$

$$\text{Área} = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12 + \pi}{4} u^2$$



Problema 2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

- (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s
- (1 puntos). Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13, -9, -1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \implies 12x + 11y + 57z + 217 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 35x + 53y - 22z = 0$$

$$t : \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

2. $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, 1, -4)$

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = -5 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = |(13, -9, -1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251} u$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- (1 punto). Resolverlo para el caso de $k = 3$.

Solución:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix} \quad |A| = -2k^2 + k + 15 = 0 \implies k = 3 \quad k = -5/2$$

- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x = y = z = 0$
- Si $k = 3$ o $k = -5/2 \implies |A| = 0 \implies$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

2. Si $k = 3$:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{4}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$A^2 = -A + 3I$$

$$2. A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$$

$$A^3 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A + 3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2010-General) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

1. (1 punto). Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbf{R} .
2. (1 punto). Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. (1 punto). Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

1. Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2 \sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

2. Si $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$. Si $f(x) = 0 \implies \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0 \implies x = 0, x = 1 \implies (0, 0)$ y $(1, 0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0, 0)$.
3. Se pide la tangente en la rama $x > 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) 2^x - \sqrt{x} \ln x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Problema 2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{cases}$$

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a .
- (1 punto). Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \implies a = 0 \quad a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $a = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Incompatible.

2. El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
2. (1 punto). Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

Solución:

- 1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -2, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$$

$\overline{P_r P_s} = (3, 3, 1) \implies$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ \overline{P_r P_s} = (3, 3, 1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

- 2.

$$\overline{P_s A} = (-3, -3, -1)$$

$$|\vec{u}_s \times \overline{P_s A}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(5, -4, -3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{u}_s| = |(-1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A, s) = \frac{|\vec{u}_s \times \overline{P_s A}|}{|\vec{u}_s|} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$$

Problema 4 (2 puntos) Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

- (1 punto). Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- (1 punto). Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

Solución:

1.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, 3) \end{cases} \implies V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \text{ u}^3$$

2. Calculamos el plano π :

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta r que pasa por $O(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte O' de r con π :

$$6(6\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) - 6 = 0 \implies \lambda = \frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O' \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49} \right)$$

- El punto O' es el punto medio entre los puntos O y el que buscamos O'' :

$$\frac{O + O''}{2} = O' \implies O'' = 2O' - O = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$$