Examen de Matemáticas II (Junio 2010-General)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:

1. (0,75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
2. (0,75 puntos). Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
3. (0,75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
4. (0,75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

1. $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

2. $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

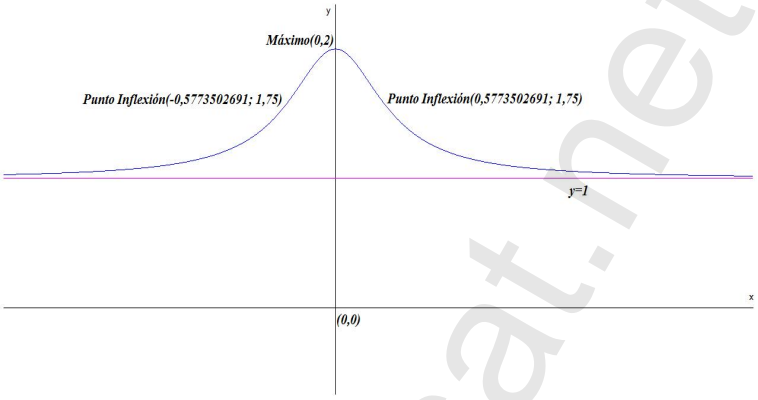
La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$

www.musat.net

3. Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

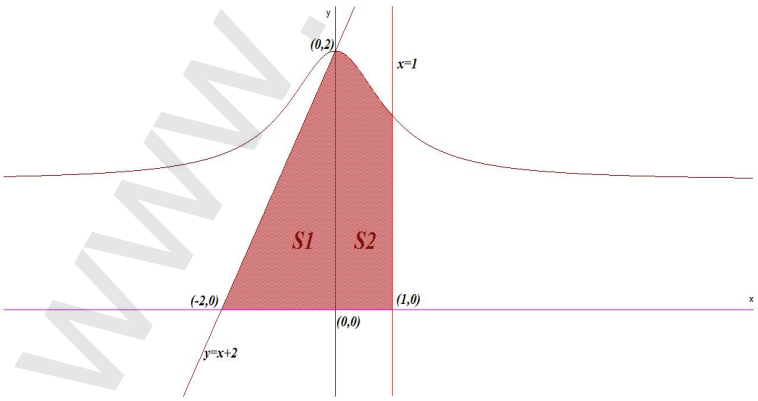
y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



4. $S1 = \dfrac{4}{2} = 2$ y $S2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$:

$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \arctan x + x]_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$$

$$Área = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12+\pi}{4}\,u^2$$



Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

www.musat.net

1. (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

2. (1 puntos). Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

1.
$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-1) \\ P_r(0,1,-4) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,4) \\ P_s(0,0,0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13,-9,-1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-1) \\ \overrightarrow{u_t} = (13,-9,-1) \\ P_r(0,1,-4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 12x+11y+57z+217 = 0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,4) \\ \overrightarrow{u_t} = (13,-9,-1) \\ P_s(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 35x+53y-22z = 0$$

$$t: \begin{cases} 12x+11y+57z+217 = 0 \\ 35x+53y-22z = 0 \end{cases}$$

2. $\overrightarrow{P_sP_r} = (0,1,-4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = |\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}| = -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |(13,-9,-1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251}\ u$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & ky- & z = & 0 \\ 2x- & y+ & 2z = & 0 \\ x- & 4y+ & kz = & 0 \end{cases}$$

se pide:

www.musat.net

1. (1 punto). Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.

2. (1 punto). Resolverlo para el casa de $k = 3$.

Solución:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix} \quad |A| = -2k^2 + k + 15 = 0 \Longrightarrow k = 3 \;\; k = -5/2$$

- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x = y = z = 0$
- Si $k = 3$ o $k = -5/2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

2. Si $k = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z = & 0 \\ 2x- & y+ & 2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{4}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

2. (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$$A^2 = -A + 3I$$

www.musat.net

2. $A^3 = A^2 \cdot A = (-A+3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$

$$A^3 = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A-3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A+3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A+12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A+3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2010-General) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x + k & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

1. (1 punto). Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.
2. (1 punto). Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. (1 punto). Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

1. Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x + k) = k$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2\sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

www.musat.net

2. Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$. Si $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = 0 \Longrightarrow$ $x = 0,\ \ x = 1 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0,0)$.

3. Se pide la tangente en la rama $x > 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)2^x - \sqrt{x}\ln x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{2}(x-1)$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{array}\right.$$

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.
2. (1 punto). Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \ \ a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

www.musat.net

- Si $a = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

2. El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & z = & 0 \\ & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \left\{\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.
2. (1 punto). Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$a la recta s.

Solución:

1.

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{array}\right. \quad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -2, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_s} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right| = (-1, -2, 1)$$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 3, 1) \Longrightarrow$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (3, 3, 1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

2.

$$\overrightarrow{P_sA} = (-3, -3, -1)$$

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}| = \left|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array}\right|\right| = |(5, -4, -3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = |(-1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

www.musat.net

Problema 4 *(2 puntos)* Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$. Se pide:

1. (1 punto). Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

2. (1 punto). Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

Solución:

1. $$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=(1,0,0)\\ \overrightarrow{OQ}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{OR}=(0,0,3)\end{array}\right. \Longrightarrow V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{array}\right|=1\ u^3$$

2. Calculamos el plano π:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(-1,2,0)\\ \overrightarrow{PR}=(-1,0,3)\\ P(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc}-1&-1&x-1\\2&0&y\\0&3&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta r que pasa por $O(0,0,0)$ y es perpendicular a π:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(6,3,2)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=6\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte O' de r con π:

$$6(6\lambda)+3(3\lambda)+2(2\lambda)-6=0\Longrightarrow \lambda=\frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O'\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)$$

- El punto O' es el punto medio entre los puntos O y el que buscamos O'':

$$\frac{O+O''}{2}=O'\Longrightarrow O''=2O'-O=\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$$

www.musat.net