

**Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-Específica)**  
**Selectividad-Opción A**

**Tiempo: 90 minutos**

---

---

**Problema 1** (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta  $t$  que pasa por el punto  $P(0, 1, -2)$  y corta a las rectas  $r$  y  $s$ .

**Solución:**

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, -1), \quad P_s(0, -2, -3)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$$

Vamos a encontrar la recta  $t$  como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, 1, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 5 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - 6y + z + 8 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0, -3, -1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ -1 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 2x - y + 3z + 7 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 6y + z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

**Problema 2** (3 puntos) El sistema  $AX = B$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz  $B$

- a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de  $a$  para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de  $B$ ).

b) (0,5 puntos). Si  $a = 4$ , y  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$ , determinar, si existen, el valor o los valores de  $b$  para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si  $a = 4$ , y  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$ , determinar, si existen, el valor o los valores de  $c$  para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

**Solución:**

a)  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$  sea cual sea el valor de  $a$ , luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \implies$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array} \right)$$

$$|A_1| = |C_1 C_2 C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1 C_2 C_4| = 2b + 5 = 0 \implies b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1 C_3 C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2 C_3 C_4| = -2b - 5 = 0 \implies b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es incompatible para cualquier valor distinto de  $-5/2$ .

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \implies$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos que  $\text{Rango}(A) = 2$ , luego tenemos que encontrar  $c$  de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa

forma  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$  de incógnitas. Tendremos  $F_2 = mF_1 + nF_2$ :

$$(0, 2, 0, c) = m(1, 0, 1, 0) + n(4, 5, 4, 10) \implies \begin{cases} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{cases} \implies c = 4$$

Es decir cuando  $c = 4$  tenemos que  $F_2 = -8/5F_1 + 2/5F_2$  y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 3** (2 puntos) Obtener el valor de  $a$  para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^2) \left( \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6ax^2}{x^2 + 3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \implies \ln e^{-6a} = \ln 4 \implies -6a = \ln 4 \implies a = -\frac{\ln 4}{6}$$

**Problema 4** (2 puntos) Hallar:

a) (0,5 puntos).  $\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx$

b) (1,5 puntos).  $\int_9^{11} (x - 10)^{19}(x - 9) dx$

**Solución:**

a)  $\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx = \left. \frac{(x - 15)^9}{9} \right|_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

b)  $\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx$  se resuelve por partes:  $u = x-9 \implies du = dx$   
 $y dv = (x-10)^{19} dx \implies v = \frac{(x-10)^{20}}{20}$   

$$\int (x-10)^{19}(x-9) dx = \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \int (x-10)^{20} dx =$$

$$\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} + C$$

$$\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx = \left. \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} \right|_9^{11} = \frac{2}{21}$$

**Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-Específica)**  
**Selectividad-Opción B**

**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro  $k$ .
- b) (1 punto). Resolverlo para  $k = 0$ .

**Solución:**

a)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1, k = -2$$

- Si  $k \neq 1$  y  $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.
- Si  $k = -2$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad y \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos  $|A| = 0$  y  $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \implies$

$\text{Rango}(A) = 2$ . Por tanto,  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$  y el sistema es incompatible.

- Si  $k = -2$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Claramente  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 1 < n^\circ$  de incógnitas y se trata de un sistema compatible indeterminado.

- b) Si  $k = 0$ :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

**Problema 2** (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
- (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

**Solución:**

- a) Asíntotas:

- Verticales:  $x = -5$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[ \frac{30}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[ \frac{30}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = +\infty$$

- Oblicuas:  $y = mx + n \implies y = 3x - 10$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + 5x} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x \right) = -10$$

b) Estudio completo:

■ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2} = 0 \implies x = -5 + \sqrt{10}, \quad x = -5 - \sqrt{10}$$

	$(-\infty, -5 - \sqrt{10})$	$(-5 - \sqrt{10}, -5 + \sqrt{10})$	$(-5 + \sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto  $(-8, 16; -43, 97)$  y un Mínimo en el punto  $(-1, 84; -6, 03)$ .

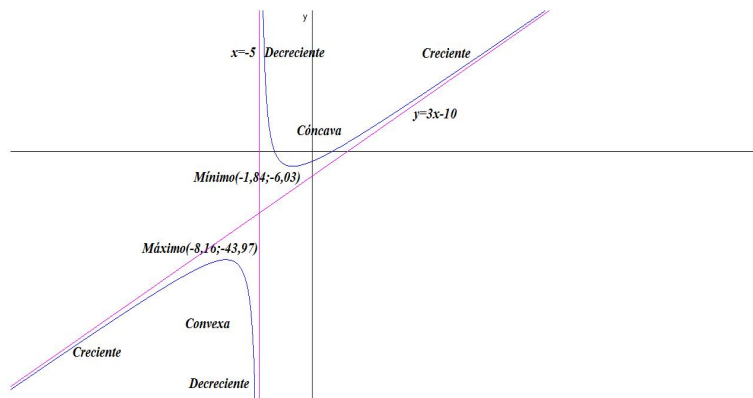
■ Curvatura:

$$f''(x) = \frac{60}{(x + 5)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

c) Representación gráfica:



**Problema 3** (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad s : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos  $A(1, 0, -1)$  y  $B(a, 3, -3)$ , determinar el valor de  $a$  para que la recta  $t$  que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , sea paralela a  $s$ .

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ .

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (a - 1, 3, -2) \\ P_t(1, 0, -1) \end{cases} \quad \text{y } t \parallel s \implies \lambda \vec{u}_t = \vec{u}_s$$

$$\lambda(a - 1, 3, -2) = (1, -3, 2) \implies a = 0, \quad \lambda = -1$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x - 1 \\ 1 & -3 & y - 1 \\ 5 & 2 & z - 5 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

**Problema 4** (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

**Solución:**

$$\vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_1}, \quad \vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_2} \implies \vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2}$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17)$$

El plano buscado tiene de ecuación  $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$  y como pasa por el punto  $(0, 0, 0) \implies \lambda = 0$ . Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$