Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-Específica)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s.

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, -1), \quad P_s(0, -2, -3)$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$$

Vamos a encontrar la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, 1, 5) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 0, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 5 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1: x - 6y + z + 8 = 0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0, -3, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ -1 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2: 2x - y + 3z + 7 = 0$$

$$t: \begin{cases} x - 6y + z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

www.musat.net

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ sea cual sea el valor de a, luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array}\right)$$

$$|A_1| = |C_1C_2C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1C_2C_4| = 2b + 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1C_3C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2C_3C_4| = -2b - 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es imcompatible para cualquier valor distinto de -5/2.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Sabemos que Rango$(A) = 2$, luego tenemos que encontrar c de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa

www.musat.net

forma Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas. Tendremos $F_2 = mF_1 + nF_2$:

$$(0,2,0,c) = m(1,0,1,0) + n(4,5,4,10) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{array} \right. \Longrightarrow c = 4$$

Es decir cuando $c = 4$ tenemos que $F_2 = -8/5F_1 + 2/5F_2$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{c} x + z = 0 \\ 2y = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} (ax^2) \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-6ax^2}{x^2 + 3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \Longrightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Longrightarrow -6a = \ln 4 \Longrightarrow a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_{14}^{16} (x - 15)^8 \, dx$

b) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_{9}^{11} (x - 10)^{19} (x - 9) \, dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x - 15)^8 \, dx = \left. \frac{(x - 15)^9}{9} \right]_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

www.musat.net

b) $\displaystyle\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$ se resuelve por partes: $u = x-9 \Longrightarrow du = dx$ y $dv = (x-10)^{19}dx \Longrightarrow v = \dfrac{(x-19)^{20}}{20}$

$$\int (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{1}{20}\int (x-10)^{20}\,dx =$$

$$\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{420} + C = \frac{(x-10)^{20}(20x-179)}{420} + C$$

$$\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \left.\frac{(x-10)^{20}(20x-179)}{420}\right]_9^{11} = \frac{2}{21}$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2010-Específica) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.
- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

www.musat.net

- Si $k=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Claramente Rango(A) =Rango$(\overline{A})=1<$ nº de incógnitas y se trata de un sistem compatible indeterminado.

b) Si $k=0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & = & 0 \\ x+ & & z= & 0 \\ & y+ & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1/2 \\ y=1/2 \\ z=1/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x=-5$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^+}\frac{3x^2+5x-20}{x+5}=\left[\frac{30}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-}\frac{3x^2+5x-20}{x+5}=\left[\frac{30}{0^-}\right]=-\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{3x^2+5x-20}{x+5}=+\infty$$

- Oblicuas: $y=mx+n \Longrightarrow y=3x-10$

$$m=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x}=3$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5}-3x\right)=-10$$

www.musat.net

b) Estudio completo:

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = -5+\sqrt{10},\ \ x = -5-\sqrt{10}$$

	$(-\infty, -5-\sqrt{10})$	$(-5-\sqrt{10}, -5+\sqrt{10})$	$(-5+\sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto $(-8,16; -43,97)$ y un Mínimo en el punto $(-1,84; -6,03)$.

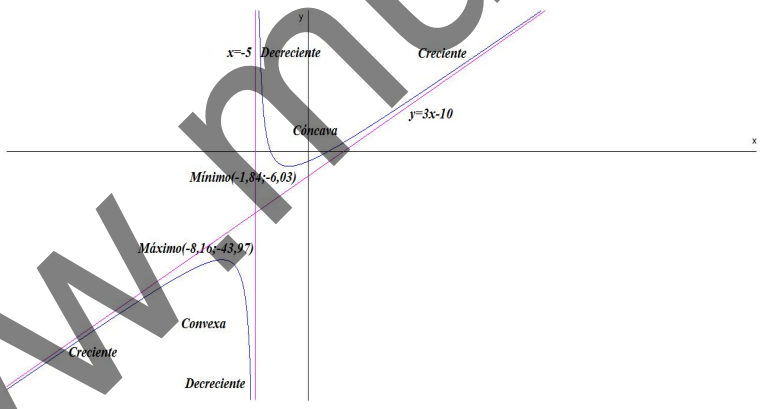
- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{60}{(x+5)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

c) Representación gráfica:



Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} 2x+y-z=-2 \\ x-2y=-1 \end{cases} \qquad s: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(a,3,-3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a s.

www.musat.net

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,5) \\ P_r(1,1,5) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-3,2) \\ P_s(-1,0,1) \end{array} \right.$$

a)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (a-1,3,-2) \\ P_t(1,0,-1) \end{array} \right. \quad \text{y } \ t \| s \Longrightarrow \lambda \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_s}$$

$$\lambda(a-1,3,-2) = (1,-3,2) \Longrightarrow a = 0, \ \ \lambda = -1$$

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,5) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-3,2) \\ P_r(1,1,5) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & -3 & y-1 \\ 5 & 2 & z-5 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

Solución:

$$\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_1}}, \ \ \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = (20,-19,17)$$

El plano buscado tiene de ecuación $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $(0,0,0) \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$

www.musat.net