Examen de Matemáticas II (Junio 2010-Específica)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

1. (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

2. (1 punto). $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

3. (1 punto). $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Solución:

1. $\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 2^4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 6^4$

2. $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3\cdot 10\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

3. $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} +$

$4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

1. (1 punto). Hallar la distancia del punto P a la recta r.

2. (2 puntos). Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

Solución:

1.

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,3) \\ P_r(-1,2,-1)\end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP}=(3,-2,0) \quad r:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1+3\lambda\end{cases}$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|=|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}|=|(6,9,1)|=\sqrt{118}$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{59}{7}}\ u$$

2. Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

- Calculo un plano π perpendicular a r que contenga a P:

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_\pi}=(-2,1,3) \\ P(2,0,-1)\end{cases} \Longrightarrow -2x+y+3z+\lambda=0$$

$$\Longrightarrow -4-3+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=7\Longrightarrow 2x-y-3z-7=0$$

- Calculo el punto de corte P'' de este plano π con r:

$$2(-1-2\lambda)-(2+\lambda)-3(-1+3\lambda)-7=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{4}{7}$$

$$P''\left(\frac{1}{7},\frac{10}{7},-\frac{19}{7}\right)$$

- El punto P'' es el punto medio entre P y P':

$$\frac{P+P'}{2}=P''\Longrightarrow P'=2P''-P=\left(\frac{2}{7},\frac{20}{7},-\frac{38}{7}\right)-(2,0,-1)$$

$$P''\left(-\frac{12}{7},\frac{20}{7},-\frac{31}{7}\right)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Hallar:

1. (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

2. (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x}\right]^{25}=(-1)^{25}=-1$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}=\lambda\Longrightarrow \ln\lambda=\lim_{x\longrightarrow 0}\ln(1+4x^3)^{2/x^3}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\ln(1+4x^3)}{x^3}=$$

$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{24}{3(1+4x^3)}=8\Longrightarrow\lambda=e^8$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano,se pide:

1. (1 punto). Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

2. (1 punto). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

1. Hay que estudiar la inecuación: $x^2+4x-5>0$.

$$x^2+4x-5=0\Longrightarrow\ x=-5,\quad x=1$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

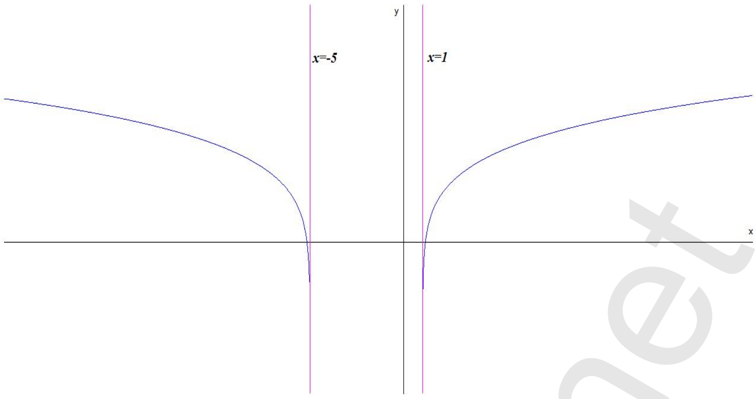
Luego $\text{Dom}(f)=(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$. Las asíntotas verticales son:

- $x=-5$:

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-}\ln(x^2+4x-5)=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow -5^+}\ln(x^2+4x-5)\ \text{no existe}$$

- $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\ln(x^2+4x-5)\ \text{no existe},\quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}\ln(x^2+4x-5)=-\infty$$



2. $f'(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x-5} = 0 \Longrightarrow x = -2$ Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-5)$ y creciente en el $(1,\infty)$.

Examen de Matemáticas II (Junio 2010-Específica) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

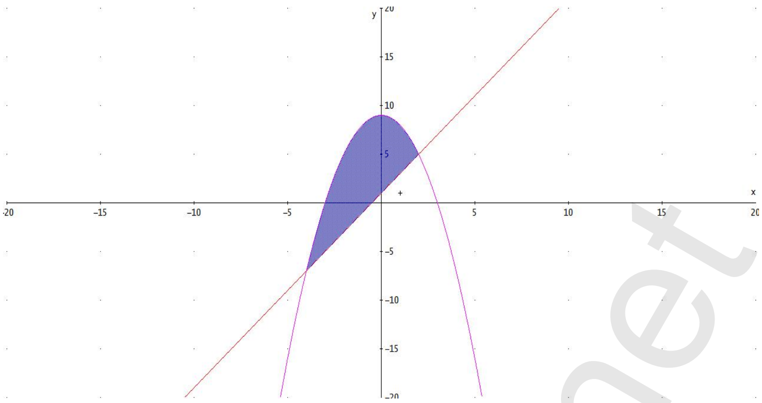
Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

1. (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
2. (1 punto). Calcular el área de dicho recinto acotado.
3. (1 punto). Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Solución:



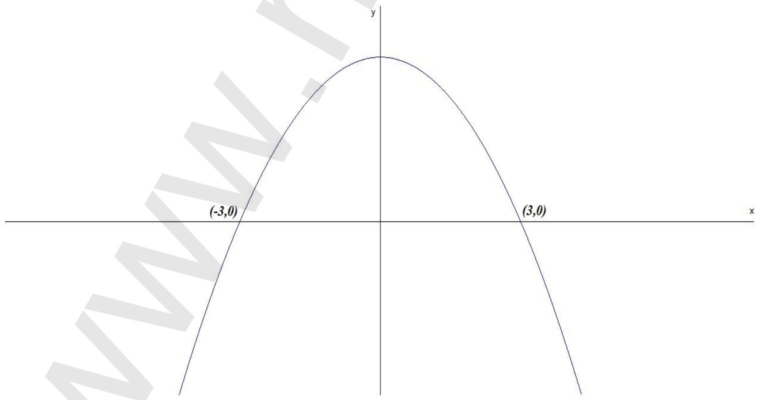
1. La función $f(x) = 9 - x^2$ tiene los puntos de corte con los ejes: $(0, 9)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, presenta un máximo en $(0, 9)$ y es una función par (simétrica respecto a OY). La función $g(x) = 2x + 1$ es una recta que pasa por los puntos: $(0, 1)$ y $(-1/2, 0)$

2. Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^{2} (9 - x^2 - 2x - 1)\, dx = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \Big]_{-4}^{2} = 36\ u^2$$

3. Dibujamos $y = 9 - x^2$ y por simetría podemos hacer:



$$V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\, dx = 2\pi \int_{0}^{3} (81 + x^4 - 18x^2)\, dx = 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3 \Big]_{0}^{3} = \frac{1296\pi}{5}\ \ u^3$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv\ 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

1. (1 punto). Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.

2. (1 punto). Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

3. (1 punto). Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (2, a, 4)$$

1. Si r está contenida en el plano $\pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$:

$$2 + 2a + 20 = 0 \Longrightarrow a = 11$$

2. Si $a = -2 \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$ y sea s la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Un punto genérico de esta recta sería $P(-3/2 + \lambda, -\lambda, -11/2 + 2\lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|-3 + 2\lambda + 2\lambda - 22 + 8\lambda + 25|}{\sqrt{4 + 4 + 16}} = \sqrt{6} \Longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = -1$$

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$

Si $\lambda = -1 \Longrightarrow \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$

3. El ángulo α que forma r y π es $90^{\circ} - \widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}} \Longrightarrow \sin\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}})$

$$\sin\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}}) = \frac{1 - 2 + 10}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z = & 9 \end{array} \right.$$

1. (1,5 puntos). Discutirlo el sistema según los valores del parámetro m.

2. (0,5 puntos). Resolverlo el sistema para el caso de $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \Longrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

- Si $m \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = -3/2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{array} \right| = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

2. Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & y+ & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right)$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = a$$

Si $a = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz no tiene inversa.

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz si tiene inversa:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{array} \right)$$