

**Examen de Matemáticas II (Junio 2010-Específica)**  
**Selectividad-Opción A**

**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** (3 puntos) Sabiendo que  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$ , y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

1. (1 punto). El determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

2. (1 punto).  $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

3. (1 punto).  $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

**Solución:**

1.  $\left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \right|^4 = \left| \begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \right|^4 = 2^4 \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \right|^4 = 6^4$

2.  $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

3.  $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} =$   
 $= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} +$   
 $4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$

**Problema 2** (3 puntos) Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto  $P(2, 0, -1)$ , se pide:

- (1 punto). Hallar la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$ .
- (2 puntos). Hallar las coordenadas del punto  $P'$  simétrico de  $P$  respecto de la recta  $r$ .

**Solución:**

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 3) \\ P_r(-1, 2, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P} = (3, -2, 0) \quad r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

$$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}| = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right| = |(6, 9, 1)| = \sqrt{118}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}} u$$

2. Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

- Calculo un plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  que contenga a  $P$ :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (-2, 1, 3) \\ P(2, 0, -1) \end{cases} \implies -2x + y + 3z + \lambda = 0$$

$$\implies -4 - 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = 7 \implies 2x - y - 3z - 7 = 0$$

- Calculo el punto de corte  $P''$  de este plano  $\pi$  con  $r$ :

$$2(-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3(-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \implies \lambda = -\frac{4}{7}$$

$$P'' \left( \frac{1}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{19}{7} \right)$$

- El punto  $P''$  es el punto medio entre  $P$  y  $P'$ :

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = \left( \frac{2}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{38}{7} \right) - (2, 0, -1)$$

$$P' \left( -\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7} \right)$$

**Problema 3** (2 puntos) Hallar:

$$1. \text{ (1 punto). } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25}$$

2. (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3}$

**Solución:**

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x} \right]^{25} = (-1)^{25} = -1$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lambda &\implies \ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + 4x^3)}{x^3} = \\ &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24}{3(1 + 4x^3)} = 8 \implies \lambda = e^8 \end{aligned}$$

**Problema 4** (2 puntos) Dada la función  $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$ , donde  $\ln$  significa logaritmo neperiano, se pide:

1. (1 punto). Determinar el dominio de definición de  $f(x)$  y las asíntotas verticales de su gráfica.
2. (1 punto). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

**Solución:**

1. Hay que estudiar la inequación:  $x^2 + 4x - 5 > 0$ .

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \implies x = -5, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	+	-	+

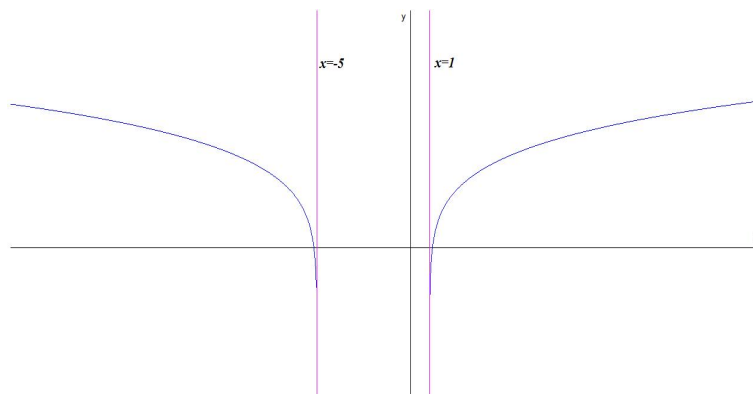
Luego  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ . Las asíntotas verticales son:

■  $x = -5$ :

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}$$

■  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty$$



2.  $f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} = 0 \implies x = -2$  Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo  $(-\infty, -5)$  y creciente en el  $(1, \infty)$ .

## Examen de Matemáticas II (Junio 2010-Específica) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

---

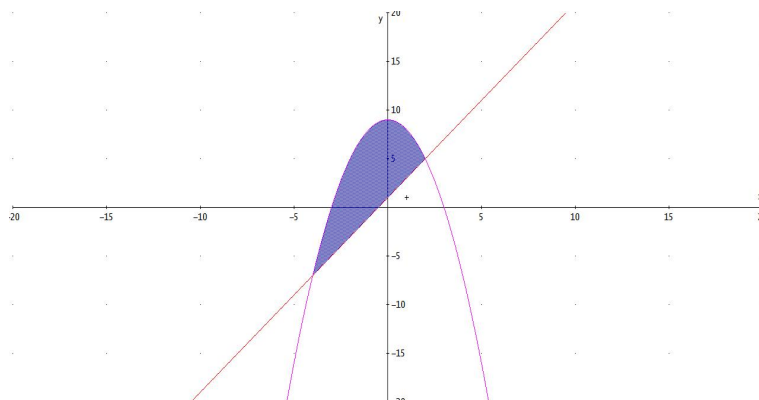
**Problema 1** (3 puntos) Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

- (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- (1 punto). Calcular el área de dicho recinto acotado.
- (1 punto). Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje  $OX$  el recinto acotado por la gráfica de  $y = 9 - x^2$  y el eje  $OX$ .

**Solución:**

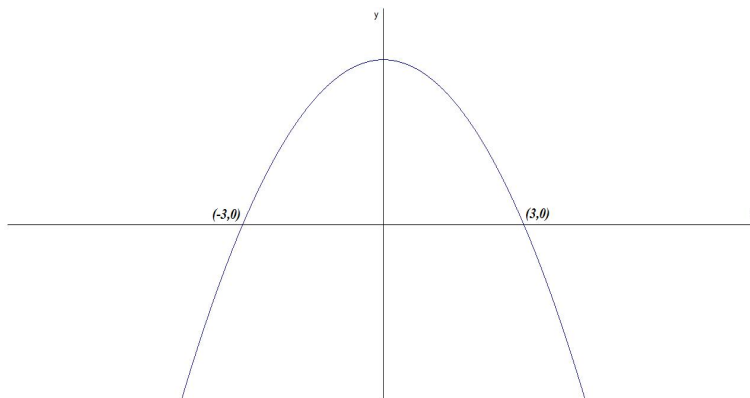


1. La función  $f(x) = 9 - x^2$  tiene los puntos de corte con los ejes:  $(0, 9)$ ,  $(3, 0)$  y  $(-3, 0)$ , presenta un máximo en  $(0, 9)$  y es una función par (simétrica respecto a  $OY$ ). La función  $g(x) = 2x + 1$  es una recta que pasa por los puntos:  $(0, 1)$  y  $(-1/2, 0)$
2. Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \implies x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^2 (9 - x^2 - 2x - 1) dx = \int_{-4}^2 (-x^2 - 2x + 8) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right]_{-4}^2 = 36 \text{ u}^2$$

3. Dibujamos  $y = 9 - x^2$  y por simetría podemos hacer:



$$V = \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^3 (81 + x^4 - 18x^2) dx = \left[ 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3 \right]_0^3 = \frac{1296\pi}{5} \text{ u}^3$$

**Problema 2** (3 puntos) Dados el plano  $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$  y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

1. (1 punto). Calcular los valores de  $a$  para los que la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ .
2. (1 punto). Para el valor de  $a = -2$ , hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P(-3/2, 0, -11/2)$ , y que dista (o distan)  $\sqrt{6}$  unidades de  $\pi$ .
3. (1 punto). Para  $a = -2$ , halla el seno del ángulo que forman  $r$  y  $\pi$ .

**Solución:**

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (2, a, 4)$$

1. Si  $r$  está contenida en el plano  $\pi \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$ :

$$2 + 2a + 20 = 0 \implies a = -11$$

2. Si  $a = -2 \implies \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$  y sea  $s$  la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P(-3/2, 0, -11/2)$ :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta sería  $P(-3/2 + \lambda, -\lambda, -11/2 + 2\lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|-3 + 2\lambda + 2\lambda - 22 + 8\lambda + 25|}{\sqrt{4 + 4 + 16}} = \sqrt{6} \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = 1, \quad \lambda = -1$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \implies \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Si } \lambda = -1 \implies \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$$

3. El ángulo  $\alpha$  que forma  $r$  y  $\pi$  es  $90^\circ - \widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi} \implies \sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi})$

$$\sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi}) = \frac{1 - 2 + 10}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

**Problema 3** (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos). Discutirlo el sistema según los valores del parámetro  $m$ .

2. (0,5 puntos). Resolverlo el sistema para el caso de  $m = 0$ .

**Solución:**

1.

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \implies m = -\frac{3}{2}$$

▪ Si  $m \neq -3/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$  de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

▪ Si  $m = -3/2$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

2. Si  $m = 0$ :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + y + z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$$

**Problema 4** (2 puntos) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  estudiar para que valores de  $a$  tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

**Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \implies |A| = a$$

Si  $a = 0 \implies |A| = 0 \implies$  la matriz no tiene inversa.

Si  $a \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies$  la matriz si tiene inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$