Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Abril 2010

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular la integral de esta función.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ Es IMPAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{no tiene solución}$$

Como además $f'(x) > 0$ podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio de la función $(R - \{0\})$ y no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

7.

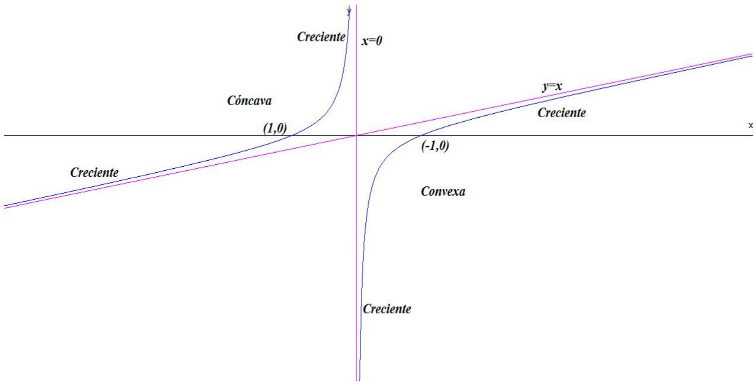
$$f''(x) = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$+$	$-$
y	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, 0)$

Convexa: $(0, +\infty)$



8. Representación

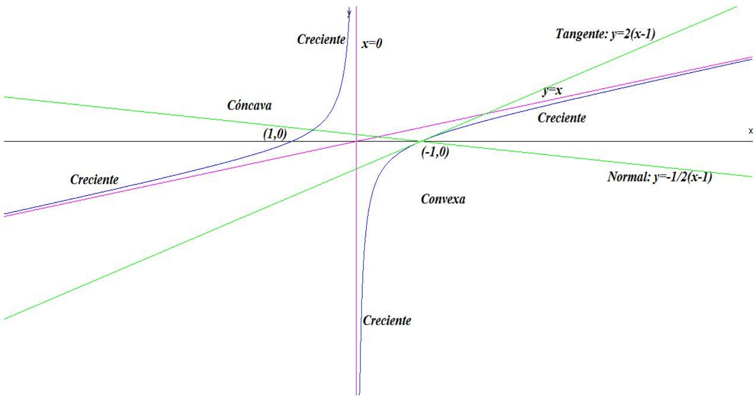
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

   Como $f(1) = 0$ las rectas pasan por el punto $(1, 0)$.

   Como $m = f'(1) = 2$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y = 2(x-1)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y = -\frac{1}{2}(x-1)$$



10.
$$\int \frac{x^2-1}{x}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)\,dx = x^2 - \ln x + C$$